mikro

μlógia 19

Szlávi Péter

Zsakó László

Módszeres programozás: Programozási tételek

Módszeres programozás: Programozási tételek

A kötet bevezető fejezetében -a μ*lógia 18* kötetében már taglalt- programozási alapfogalmakat foglaljuk össze, és későbbi céljainknak megfelelően formalizáljuk.

Az I. fejezetben kaptak helyet a legelemibb tételfajták, nevezetesen azok, amelyek egy sorozathoz rendelnek egy értéket: a *sorozatszámítás*, az *eldöntés*, a *kiválasztás*, a *keresés* lineáris változata, a *megszámolás* s végül a *maximumkiválasztás*.

Ezt követően rátérünk azokra a "bonyolultabbak" tételekre, amelyeket az jellemez, hogy mind a bemeneten, mind a kimeneten legalább egy sorozat szerepel. Kiindulunk a *másolás* legáltalánosabb tételéből, amelyre az Adatfeldolgozás című mikrológia kötet is épül. A fejezet további öt tétele: *kiválogatás*, *szétválogatás*, *metszet*, *unió* és *egyesítés*.

A harmadik és a negyedik fejezet egy-egy gyakori, "önálló" témát dolgoz föl, úgymint *rendezés* és *keresés*. A rendezés témakör csonka lenne, ha összehasonlító hatékonysági jellemzőket nem mellékelnénk. Itt megadjuk az egyes nevezetes (10) algoritmus minimális és maximális lépésszámát (hasonlítások, illetve mozgatások száma), valamint az adatok helyfoglalását. Egyes rendezések algoritmusát más mikrológia kötetekben lehet megtalálni. (μ*lógia 4* - Quicksort, μ*lógia 27* - rendezés bináris fával.)

Az utolsó fejezetben jutunk el a csúcspontra: megvizsgáljuk, hogyan lehet tételeket egymásra építeni. Központi szereplő -érthető okok miatt- a *kiválogatás* tétel lesz.

Szlávi Péter — Zsakó László

Módszeres programozás:

Programozási tételek

μlógia 19

ELTE Informatikai Kar

6., bővített kiadás

Készült az *NJSZT* gondozásában
200 példányban
Felelős kiadó: dr. Kozma László
Sorozatszerkesztő: Szlávi Péter - Zsakó László

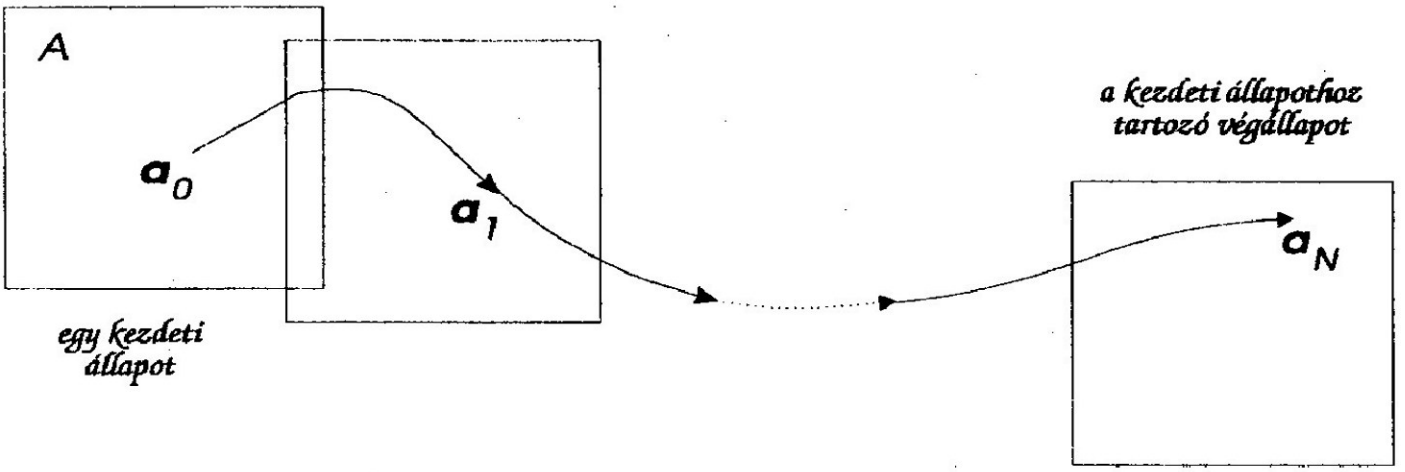
Tartalomjegyzék

Bevezetés

Programozási feladatok megoldásakor a program felülről lefelé való kifejtésekor háromféle programszerkezetet használunk: utasítások **egymásutáni végrehajtását**, feltételtől függő **elágazást**, valamint utasítások többszöri megismétlését, **ciklust**. Ezek választása a megoldandó feladat specifikációjától függ.

A programozási bevezetővel foglalkozó füzetben áttekintettük a specifikáció témakörét, a specifikáció és a programszerkezet kapcsolatát. E kötetben is alapvető szerepet játszanak ezek az ismeretek, így emlékeztetőül röviden áttekintjük őket, illetve a szükségleteknek megfelelően formalizáljuk.

A feladatot mindig valamilyen adatok együttesén fogalmazzuk meg (*ezt ismerjük, erre vagyunk kíváncsiak)*, ezen adatok értékhalmazai direkt*szorzatát nevezzük* **állapottérnek**[1]. E tér egy pontját -ami a programfutás pillanatnyi rögzítése- nevezzük állapotnak (innen származik a tér neve), koordinátáit pedig változóknak. (Egyes állapottérkoordinátákról kiderülhet a feladatmegoldás során, hogy nem elemi értékkel rendelkeznek.) A változók tehát tulajdonképpen az állapottér projekciói (vetítései).



a program futása: egyes "fázisai"

Példa:

Állapottér:	$A=BxCx...xH$
Egy állapota:	$a=(b,c,...,h)$, *ahol* $b \in B$, $c \in C$, ..., $h \in H$.
Egy változója:	$\beta: A \rightarrow B$ *projekció*

---

1 Az állapottér a feladatmegoldás során a kezdeti elképzeléshez képest általában bővül; többnyire minden finomítási lépésben.

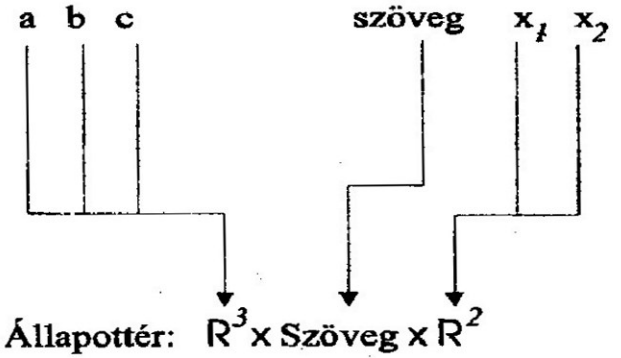
Feladaton mindig egy **relációt** értünk, amely része az AxA állapotpárok halmazának ($F \subseteq AxA$). A fenti ábrán pl. az $(a_0,a_N) \in F$, azaz az F-t a lehetséges kezdőállapotok és a hozzátartozó végállapotok párjai alkotják. $(a_0 = (b_0,c_0,...,h_0), a_1 = (b_1,c_1,...,h_1),... a_N = (b_N,c_N,...,h_N))$ Tehát elsődleges dolog minden feladatnál megállapítani az állapotteret, s az egyes koordinátáinak lehetséges kapcsolatait. Ezután meg kell határozni az állapottérnek azt a részét, amelyre a feladat megoldását meg kell kapnunk. Ezt írhatjuk le az **előfeltétellel**; az elérendő eredmény, azaz a cél meghatározására szolgál az **utófeltétel**. (Pusztán technikai okok miatt történik e két A-beli részhalmaz megadása egy-egy feltétellel, azaz matematikai formalizmust fölhasználva egy-egy logikai formulával.)

A fogalmak formális szemléltetésére használjuk ugyanazokat a példákat, amelyeket a bevezető kötetben áttekintettünk!

1. feladat:

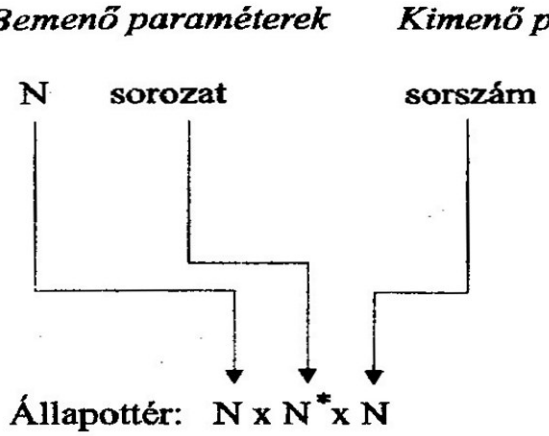
Adjuk meg egy legfeljebb másodfokú egyenlet megoldását! Az egyenlet $ax^2+bx+c=0$ formában adott. A megoldás(ok) mellett szövegesen is adjuk meg a megoldás milyenségét (két különböző valós megoldás, két egybeeső valós megoldás, nincs valós megoldás, elsőfokú egyenlet egy megoldása)!

Bemenő paraméterek *Kimenő paraméterek*



2. feladat (1. változat):

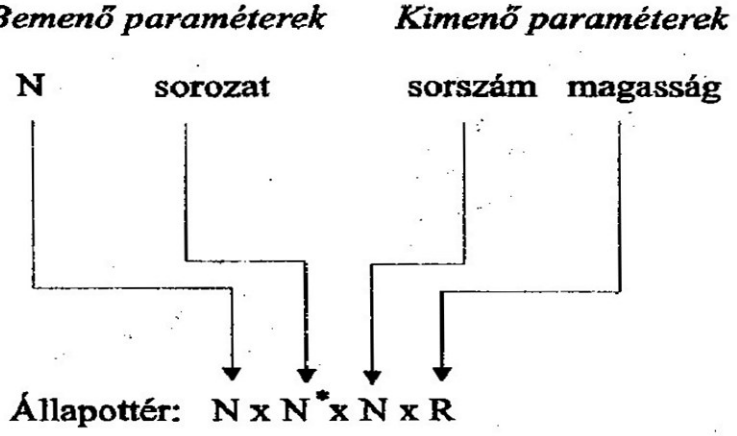
Adjuk meg N ember közül a legmagasabb sorszámát! A magasságokat centiméterben adjuk meg.



ahol $N^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} N^k$

3. feladat (1. változat):

Adjuk meg N ember közül a második legmagasabb sorszámát és magasságát! A magasságokat centiméterben adjuk meg, s az eredményt méterben várjuk.



A feladat pontos megadásához ismernünk kell a bemenő és a kimenő adatok leírását. Azaz a specifikációnak tartalmaznia kell az állapottér egyes komponenseit. Hogy hivatkozni lehessen ezekre: nevezzük el őket! Ezek lesznek egyben a program *bemenő*, ill. *kimenő változói*.

1. feladat:

Bemenet: $a,b,c \in \mathbf{R}$ - *együtthatók.*
Kimenet: $sz \in Szöveg$ - *a megoldás esetére utaló szöveg*
$x_1,x_2 \in \mathbf{R}$ - *az egyenlet megoldásai.*

2. feladat:

Bemenet: $N \in \mathbf{N}$ - *az emberek száma,*
$A \in \mathbf{N}^N$ - *a magasságukat (cm) tartalmazó tömb.*
Kimenet: $MAX \in \mathbf{N}$ - *a legmagasabb ember sorszáma.*

3. feladat:

Bemenet: $N \in \mathbf{N}$ - *az emberek száma,*
$A \in \mathbf{N}^N$ - *a magasságukat (cm) tartalmazó tömb.*

Kimenet: $MAX2 \in \mathbf{N}$ - *a második legmagasabb ember sorszáma,*
$MAG2 \in \mathbf{R}$ - *a második legmagasabb ember magassága (m).*

Most a fenti absztrakt fogalmakat kissé gyakorlatiasabb szemszögből tekintve újrafogalmazzuk. A specifikációnak tartalmaznia kell a **feladatban használt fogalmak definícióját,** valamint az **eredmény kiszámítási szabályát**. A bemenő, illetve a kimenő adatokra kirótt feltételeket neveztük **előfeltételnek,** illetve **utófeltételnek**. Mint az alábbiakból kiderül: szükség esetén bővítjük az állapotteret új (munka-) változókkal.

1. feladat:

Állapottér kibővítve: $\mathbf{R}^3 x Szöveg x \mathbf{R}^2 x \mathbf{R}$.
Új változó: $d \in \mathbf{R}$ - *diszkriminánsz.*
Előfeltétel: $a \neq 0$ *vagy* $b \neq 0$.
Utófeltétel: $d=b*b-4*a*c$ *és*
$(a=0 \Rightarrow x_1=-c/b$, *sz="elsőfokú az egyenlet, egy megoldása van") és*
$(a \neq 0$ *és* $d<0 \Rightarrow$ *sz="nincs valós megoldás") és*
$(a \neq 0$ *és* $d=0 \Rightarrow x_1=-b/(2*a)$, *sz="egy kétszeres valós megoldás van") és*
$(a \neq 0$ *és* $d>0 \Rightarrow x_1=(-b+\sqrt{b*b-4*a*c})/(2*a)$, $x_2=(-b-\sqrt{b*b-4*a*c})/(2*a)$,
sz="két különböző valós megoldás van").

2. feladat:

Előfeltétel: -.
Utófeltétel: $1 \leq MAX \leq N$ *és* $\forall i\ (1 \leq i \leq N)$: $A(MAX) \geq A(i)$.

3. feladat:

Állapottér kibővítve: $\mathbf{N} x \mathbf{N}^* x \mathbf{N} x \mathbf{R} x \mathbf{N}$.
Új változó: $MAX \in \mathbf{N}$ - *a legmagasabb sorszáma.*
Előfeltétel: $N \geq 2$ *és* $\exists i,j\ (1 \leq i,j \leq N)$: $A(i) \neq A(j)$.
Utófeltétel: $1 \leq MAX \leq N$ *és* $\forall i\ (1 \leq i \leq N)$: $A(MAX) \geq A(i)$ *és*
$1 \leq MAX2 \leq N$ *és* $\forall i\ (1 \leq i \leq N)$: $(A(MAX2) \geq A(i)$ *vagy* $A(MAX2) < A(MAX))$ *és*
$MAG=A(MAX2)/100$.

A feladatot megoldó algoritmus, illetve program természetesen lehet a kitűzött feladatnál *általánosabb*. Ez azt jelenti, hogy *a program utófeltétele lehet erősebb*, azaz a feladat által meghatározott helyes eredmények halmazánál szűkebbet adó, *előfeltétele* pedig *gyengébb*, azaz a feladat által meghatározott bemenő adatoknál bővebb körre is működhet.

A most következő rövid okfejtésből látszik majd, hogy a specifikáció megfelelően precíz megadása komoly segítséget jelenthet a későbbi algoritmizálásnál. Induljunk ki abból, hogy a feladatot megoldó program valamilyen leképezést valósít meg a bemenő és a kimenő adatok között. Ezt a leképezést, amely sokszor egyértelmű, hívják *programfüggvény*nek. A programfüggvény definiálására használjunk a függvények körében

szokványosnak mondható formális eszközöket, úgymint: az *egymásba ágyazás*, vagy *függvénykompozíció*, az *alternatíva* és a *rekurzió*. Egy egyszerű példán is könnyen belátható, hogy a függvényműveletek és az algoritmikus szerkezetek között a következő kapcsolat áll fönn:

függvényművelet		***algoritmikus szerkezet***	
kompozíció	$h(x) := (f \circ g)(x)$	hb:=g(x) h:=f(hb)	*szekvencia*
alternatíva	$h(x) := \begin{cases} f(x), & ha\ T(x) \\ g(x), & különben \end{cases}$	Ha T(x) akkor h:=f(x) különben h:=g(x)	*elágazás*
rekurzió	$h(x) := \begin{cases} f(x), & ha\ T(x) \\ (g \circ h \circ i)(x), & különben \end{cases}$	k:=0 Ciklus amíg nemT(x) x:=i(x): k:=k+1 Ciklus vége x:=x: hx:=f(x*) Ciklus l=1-től k-ig hx:=g(hx) Ciklus vége h:=hx	*ciklus*

A struktúraszerinti feldolgozás -már korábban megismert[2]- elve további támpontokat nyújt az algoritmus formálásához. Emlékezzünk, hogy az adatok szerkezete és az őket feldolgozó programszerkezet között is -az előbbihez hasonló könnyedséggel belátható- viszony található:

adatszerkezet		***programszerkezet***
skalár	„elemi adat"	értékadás (függvény), eljárás
direktszorzat	rekord	mezők szerinti szekvencia
iteráció	sorozatféle=sokaság	„elemfeldolgozó magú" ciklus
unió	alternatív rekord	feltétel szerinti elágazás

Ezek a felismerések, elvek sem adnak azonban segítséget abban, hogy teljes precízitásában „generáljuk" a program algoritmusát. Hogy ebben az értelemben előbbre juthassunk, fel kell ismernünk a programozási feladatokban rejlő lényeges jellemzőt: *a feladatok nagy feladatosztályokba sorolhatók a feladat jellege szerint, s e feladatosztályokhoz tudunk készíteni a teljes feladatosztályt megoldó algoritmusosztályt.* Ezeket a típusfeladatokat **programozási tételeknek** fogjuk nevezni, ugyanis bebizonyítható (s ezt meg is tesszük), hogy a megoldásaik a feladat garantáltan helyes megoldásai.

[2] Természetesen "algoritmikus rekurzióval" még triviálisabb megoldást lehet találni. (Speciális esetekben lényegesen egyszerűbb az iteratív változat.)

E programozási tételek ismeretében már a legtöbb feladat megoldása során nincs más dolgunk, mint felismerni a megfelelő programozási tételt, megfelelteni a konkrét adatait az általános feladatosztálynak, majd ezeket az általános megoldó algoritmusban a konkrétumokkal helyettesíteni. Ezzel a módszerrel a feladatnak mindig egy -elvileg- helyes *megoldst* kapjuk[3], azonban ez nem mindig a leghatékonyabb, legegyszerűbb, legügyesebb megoldás lesz. A helyes megoldásból a különféle szempontok szerinti hatékony megoldáshoz vezető úttal a sorozat egy másik kötete[4] foglalkozik.

Nyilvánvalónak látszik, hogy a programfüggvény három lehetséges esete közül a ciklussal (illetve rekurzióval) megoldandó feladatok lesznek a legnehezebbek. A programozási tételek éppen ezért az ilyen feladattípusokhoz kapcsoldnak.

Ezek a feladatok mindig olyanok lesznek, hogy egy (vagy több) adatsokasághoz kell rendelnünk valamilyen eredményt. E sokaságot az egyszerűség kedvéért mindig valamilyen sorozatként fogjuk fel. A „sorozatság" az elemek feldolgozási sorrendjét határozza meg.[5] A legtöbb esetben elég olyan sorozatokkal foglalkozni, amelyek elemei egymás után -egyesével- feldolgozhatók. Ez a bemenő sorozatra olyan művelet létét feltételezi, amely elölről, egyenként képes adni a sorozat elemeit, az eredmény sorozatba pedig az addig belekerült elemek mögé képes tenni egy új elemet. További egyszerűsítést vezetünk be a megfogalmazásba: a sorozatokat mindig egy tömbbel[6] ábrázoljuk.

A vizsgált feladatosztályokat 4 típusra osztjuk a bemenet és a kimenet alapján:

- **egy** sorozathoz **egy** értéket rendelő feladatok,
- **egy** sorozathoz **egy** sorozatot rendelő feladatok,
- **egy** sorozathoz **több** sorozatot rendelő feladatok,
- **több** sorozathoz **egy** sorozatot rendelő feladatok.

Mindegyik programozási tétel tárgyalását néhány konkrét példával kezdjük. E példák alapján határozzuk meg a feladattípus általános jellemzőit. Ezután definiáljuk az általános megoldásban használt adatokat mind szöveges leírással, mind pedig formális (matematikai) eszközökkel leírva. A formális leírásokat a szövegből keretezéssel kiemeltük, a tételek ezek kihagyásával is megérthetők.

Következő lépésként áttérünk a megoldás kialakítására, majd folytatjuk az általános megoldás algoritmusával. Ha a tételnek többféle variációját tárgyaljuk, akkor itt ezek következnek, s befejezésként megoldunk néhányat a fejezet elején közölt példákból.

---

[3] Természtesen ez nem véd a hibás gondolkodástól, illetve a kódolás során elkövetett hibák ellen.

[4] L. *µlógia 6* - Módszeres programozás: Hatékonyság.

[5] Azaz föltételezzük, hogy létezik elemei között egy egyértelmű *rákövetkezési reláció* és ezen nyugvó elemeléréshez van valamilyen definiált *szelekciós*, illetve *konstrukciós függvény*.

[6] Adott, *rögzített elemszámú* sorozat, *indexelés* művelettel.

JELÖLÉSEK

A könyvben használunk néhány jelölést, ezért a továbblépés előtt tekintsük át ezeket:

$\mathbf{N}_0$	- 0, 1, 2, ... (nem negatív egész számok)
H	- tetszőleges halmaz (halmazműveletekkel)
H* *H-beli véges sorozatok halmazá*	- $H^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} H^k$ (i. elemére h_i-vel hivatkozunk)
H^N	- *H-beli N elemű sorozatok halmaza*
L	- *logikai értékek* halmaza: {igaz,hamis}
H *rendezett halmaz*	- $\forall\ h_1,h_2 \in H$: $h_1 \le h_2$ vagy $h_1 \ge h_2$

Megjegyzés:

ha egy H halmazról *rendezettséget* feltételezünk, akkor azt így írjuk le: *Rendezett(H)*.

S *rendezett sorozat*	- $\forall\ i\ (1 \le i < N)$: $s_i \le s_{i+1}$[7]
$S \in H^*$ *halmazfelsorolás*	- $\forall\ i,j\ (1 \le i,j \le N)$: $i \ne j \Rightarrow s_i \ne s_j$
$X,Y \in H^*$: $X \subseteq Y$ *X részsorozata Y-nak*	- $X=(x_1,...,x_M)=(y_{i_1},...,y_{i_M})=Y$ és $i_1<...<i_M$ (természetesen: $M \le N$)
$X,Y \in H^*$: X&Y *két sorozat egymásután írása*	- $X\&Y = (x_1,....,x_N,y_1,...,y_M)$
R halmaz: S=Permutáció(R) *S R permutációja*	- $R=(r_1)$ és $S=(r_1)$ vagy $S=(s_1)\&S'$ és $s_1 \in R$ és S'=Permutáció($R \setminus s_1$)
$X,Y,Z \in H^*$: $X=Y \cup Z$ *Y és Z az X diszjunkt felbontása*	- $X=Y\&Z$ és $Y \cap Z=0$ [8]

[7] Sokszor kényszerülünk arra, hogy az S sorozat *i.* elemét S_i helyett S(i)-vel jelöljük. Ez ne okozzon zavart.

[8] azaz az X minden eleme pontosan egyszer szerepel az Y vagy a Z sorozatban.

I. Elemi programozási tételek

Feladataink egy jelentős csoportjában egyetlen bemenő sorozat alapján kell meghatároznunk egy értéket eredményként.

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N, F:H*→G  ← az állapottér bemeneti komponensei
Kimenet : S∈G                  ← az állapottér bemeneti komponensei
ef      : -                    ← Nincs előfeltétel (ef)'
uf      : S=F(X1,...,XN).      ← Utófeltétel (uf), amilyen tulajdonsággal megálláskor az S rendelkezni fog. (Most hogy éppen az adott értékű lesz.)
```

Az elő-, illetve az utófeltételben pontosan meg kellene fogalmaznunk azt is, hogy a bemenő adatok, paraméterek értéke a megoldás során változatlan marad, ettől azonban az egyszerűbb felírás miatt -általában- eltekintünk. A pontos használat miatt -mintaként- ezen a helyen így is megadjuk. A *aposztrof* jelöli a paraméter, bemenő változó *régi* értékét.

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N, F:H*→G
Kimenet : S∈G
ef      : -
uf      : S=F(X1,...,XN) és N=N'  és  X=X'
```

Ez a csoport több feladattípust tartalmaz, nézzük végig ezeket!

1. Sorozatszámítás

Kezdjük a legelső témakört néhány feladattal!

F1. Egy osztály N db tanuló osztályzatának ismeretében adjuk meg az osztály átlagát!

F2. Egy M elemű betűsorozat betűit fűzzük össze egyetlen szöveg típusú változóba!

F3. Készítsünk algoritmust, amely egy autóversenyző körönkénti ideje alapján meghatározza a versenyző egy kör megtételéhez szükséges átlagidejét!

F4. A Balaton mentén K db madarász végzett megfigyeléseket. Mindegyik megadta, hogy milyen madarakat látott. Készítsünk algoritmust, amely megadja a megfigyelések alapján a Balatonon előforduló madárfajokat!

F5. Adjuk meg az első N természetes szám szorzatát (N faktoriális)!

Vizsgáljuk meg, mi a közös a fenti öt feladatban! Mindegyikben adatok valamilyen sorozatával kell foglalkoznunk, e sorozathoz kell hozzárendelnünk egyetlen értéket. Ezt az értéket egy, az egész sorozaton értelmezett függvény adja (N szám összege, M betű egymásutánírása, K halmaz uniója, N szám szorzata). Ezt a függvényt azonban felbonthatjuk értékpárokon kiszámított függvények sorozatára (2 „valami" összegére, egymásután írására, uniójára, szorzatára).

*Az **algoritmus:***

```
Változók:
  N : Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X : Tömb(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
  F0: Elemtípus1                          [a művelet nulleleme]
  S : Elemtípus2                                  [az eredmény]
```

Bemenet	: $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $F: H^* \to G$
Kimenet	: $S \in G$
ef	: $\exists F_0 \in G$ (nullelem) és $\exists f: G \times H \to G$ és $F(X_1, \ldots, X_N) = f(F(X_1, \ldots, X_{N-1}), X_N)$ és $F() = F_0$
uf	: $S = F(X_1, \ldots, X_N)$.

Így tehát minden olyan művelet szerepelhet e feladattípusban, amelyre a matematika valamilyen „egységes" jelölést használ: összeg, szorzat, unió, metszet, logikai műveletek, konkatenáció, ... Mindegyik művelet visszavezethető egy bináris műveletre, s megadható mindegyikhez egy semleges elem (nullelem) is, amelyre egy tetszőleges elemmel és vele elvégzett 2 operandusú művelet az adott elemet adja.

Variációk: $F = \Sigma, \Pi, \cup, \cap, \wedge, \vee$, & (konkatenáció).

F_0=0, 1, {}, alaphalmaz, Igaz, Hamis, "".

A megoldás a nullelemre, valamint a 2 operandusú műveletre épül, a matematikában is szokásos módszer, az indukció alapján:

- 0 elemre tudjuk az eredményt: F_0,
- ha i-1 elemre tudjuk az eredményt (F^{i-1}), akkor i elemre (F^i) a következőképpen kell kiszámítani: $F^i = f(F^{i-1}, X_i)$.

Az F-re vonatkozó alábbi rekurzív definícióból:

$$F_i := F(X_1, \ldots, X_i) := \begin{cases} F_0 & , \text{ha } i = 0 \\ f(F^{i-1}, X_i)), & \text{különben} \end{cases}$$

–a korábbiak alapján, a specialitásokat figyelembe véve– így kapható az algoritmus első változata:

a bevezetésbeli jelölésekkel	*a specialitások figyelembe vétele*

k:=0
Ciklus amíg nem T(x)
  x:=i(x): k:=k+1
Ciklusvége
x*:=x: hx:=f(x*)
Ciklus l=1-től k-ig
  hx:=g(hx)
Ciklus vége
h:=hx
	[T(x)≡i=0]
	k:=N: x:=() [i:(X_1,..X_i)→(X_1,X_{i-1})]
	x*:=(): hx:=F [h()=F]
	  hx:=f(hx,X)
	F:=hx

A „fölöleges" dolgokat kihagyva mindössze ennyi marad:

```
hx:=F0
Ciklus l=1-től N-ig
   hx:=f(hx,X)
Ciklus vége
F:=hx
```

Végezetül az algoritmikus nyelvünkben szokásos jelölésekkel a feladatot megoldó algoritmus:

```
Sorozatszámítás(N,X,S):
  S:=F0
  Ciklus I=1-től N-ig
    S:=f(S,X(I))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Alkalmazzuk az általános megoldást a fejezet elején kitűzött egyes feladatokra!

F1. N szám összege

```
elemek száma: N
osztályzatok: X N elemű
vektor
'F, f, F0     : S, +, 0
```

```
Összegzés(N,X,S):
  S:=0
  'Ciklus I=1-től N-ig
    S:=S+X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

F2. M betű egymásutánírása

```
elemek száma : M
betűk        : X M elemű
vektor
'F, f, F0    : &, +, "",
```

```
Egymásután(M,X,SZ):
  SZ:="" [üres szöveg]
  Ciklus I=1-től M-ig
    SZ:=SZ+X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

F4. K halmaz uniója

```
elemek száma : K
megfigyelések: X N db elem
F, f, F0     : ∪, ∪, {}
```

```
Unió(K,X,H):
  H:={} [üres halmaz]
  Ciklus I=1-től K-ig
    H:=H∪X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

2. Eldöntés

Az előző programozási tétel két speciális esetében az ott közölt megoldás sok felesleges lépést tartalmazhat. Ez a tétel annak a hiányosságait pótolja e speciális esetekben. Az alábbi példákban keressük meg a közös vonást (ami speciális esetét jelenti az előzőnek)!

F6. Döntsük el egy számról, hogy prímszám-e!

F7. Döntsük el egy szóról a hónapnevek sorozata alapján, hogy egy hónap neve-e!

F8. Döntsük el egy tanuló év végi osztályzatai alapján, hogy kitűnő tanuló-e!

F9. Júniusban minden nap délben megmértük, hogy a Balaton Siófoknál hány fokos. Döntsük el a mérések alapján, hogy a víz hőfoka folyamatosan emelkedett-e!

E feladatok közös jellemzője, hogy a bemenetként megadott sorozathoz egy logikai értéket kell rendelni: a feltett kérdésre **igennel** vagy **nem**- mel kell válaszolni. A vizsgált sorozat elemei tetszőlegesek lehetnek, egyetlen jellemzőt kell feltételeznünk róluk: egy tetszőleges elemről el lehet dönteni, hogy rendelkezik-e egy bizonyos tulajdonsággal.

A feladatok így két csoportba sorolhatók, az egyikben azt kell eldönteni, hogy egy sorozatban létezik-e adott tulajdonságú elem, a másikban pedig azt, hogy mindegyik elem rendelkezik-e ezzel a tulajdonsággal. Vizsgáljuk először az elsőfajtájúakat!

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N, T:H→L
Kimenet : VAN∈L
ef      : -
uf      : VAN ≡ (∃i (1≤i≤N): T(Xi))
```

Az algoritmus:

```
Függvény:
  T: Elemtípus → Logikai
```

```
Változók:
  N   : Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X   : Tömb(1..N:Elemtípus)        [a feldolgozandó sorozat]
  VAN: Logikai                                    [az eredmény]
```

A feladattípus megoldására az előző programozási tétel is alkalmas a következő megfeleltetéssel: F = $\bigvee$, f = $\vee$, F_0 = hamis.

```
Eldöntés(N,X,S):
  S:=hamis
  Ciklus I=1-től N-ig
    S:=S ∨ X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Észrevehetünk azonban egy fontos tulajdonságot. Ha a megoldásban az S változó értéke egyszer igazra változik, akkor a megoldás végéig biztosan az is marad. Tehát az ezutáni műveletek elvégzése teljesen felesleges. Ezt a tulajdonságot kihasználva készíthetjük el az igazi megoldást.

Ebben az esetben egy olyan ciklus a megoldás, amely vagy akkor áll le, ha találtunk egy, a keresett tulajdonsággal rendelkező elemet, vagy pedig akkor, ha ilyen elem a sorozatban már nem létezhet, azaz elfogytak a megvizsgálandó elemek.

```
Eldöntés(N,X,VAN):
  I:=1
  Ciklus amíg I≤N és nem T(X(I))
    I:=I+1
  Ciklus vége
  VAN:=(I≤N)
Eljárás vége.
```

Fordítsuk most figyelmünket a másik csoportra! Azt, hogy mindegyik elem rendelkezik egy adott tulajdonsággal, átfogalmazhatjuk arra, hogy nem létezik az adott tulajdonsággal nem rendelkező elem. Ezek alapján a fenti megoldásban 2 helyen tagadást alkalmazva megkapjuk ennek a csoportnak a megoldástípusát is. (Ez a sorozatszámítás az F = $\bigwedge$, f = $\wedge$, F_0= igaz értékekkel).

```
Eldöntés(N,X,MIND):
  I:=1
  Ciklus amíg I≤N és T(X(I))
    I:=I+1
  Ciklus vége
  MIND:=(I>N)
Eljárás vége.
```

Az eldöntés tipikusan olyan feladat, amelynél kódolási problémák merülhetnek fel. Ilyenekkel foglalkozunk az algorimusok kódolásával kapcsolatos füzetben, itt csupán utalunk a problémára és a lehetséges megoldásaira.

A programozási nyelvek egy jelentős részében a logikai kifejezések kiértékelésekor az **és**, illetve a **vagy** műveletek mindkét operandusát kiértékelik futáskor, még akkor is,

ha az egyik operandus értéke alapján a végeredmény egyértelműen eldönthető lenne. E programozási tételnél így az I≤N feltétel nem teljesülése esetén is meg kell vizsgálni a T(X(I)) értékét. Ha a felhasznált tömb pontosan N elemű, akkor ez tömbindexelési hibához vezet. Többféle megoldással foglalkoztunk a kódolási kérdések kapcsán:

- vegyünk fel egy fiktív (N+1.) elemet a tömb végére,
- a ciklus egy lépéssel hamarabb álljon le, s vizsgáljuk a leállás okát,
- válasszuk szét a két részfeltétel kiértékelését, s a T(X(I))-t csak akkor értékeljük ki, amikor szükséges.

Néhány feladat megoldása következik.

F6. Létezik-e a számnak 1-től és önmagától különböző osztója?

```
elemek száma : N-2
osztók       : 2,3, ..., N-1
T(e)=T'(e,N) : e|N
   (T'(e,N) : a valódi függést
        kifejező leképezés)
```

```
Eldöntés(N,PRIM):
  I:=2
  Ciklus amíg I≤N-1 és
                nem I|N
    I:=I+1
  Ciklus vége
  PRIM:=(I>N-1)
Eljárás vége.
```

F9. A hőmérsékletek sorozata monoton növekedő-e?

```
elemek száma : N-1
hőmérsékletek: X N db elem
T(X(e))=T'(e): X(e)≤X(e+1)
```

```
Eldöntés(N,X,MONOTON):
  I:=1
  Ciklus amíg I≤N-1 és
            X(I)≤X(I+1)
    I:=I+1
  Ciklus vége
  MONOTON:=(I>N-1)
Eljárás vége.
```

3. Kiválasztás

Ha kicsit belegondolunk, az előző programozási tétel megoldása a tőle vártnál több eredményt is adhat. Ennél a tételnél ezt a *többet* vizsgáljuk.

F10. Ismerjük egy hónap nevét, a hónapnevek sorozata alapján mondjuk meg a sorszámát!

F11. Adjuk meg egy természetes szám legkisebb, 1-től különböző osztóját!

F12. A naptárban található névnapok alapján adjuk meg legjobb barátunk (barátnőnk) névnapját! (Itt nem a „legjobbság" megfogalmazása okozza az algoritmikai problémát.)

Keressük itt is a közös jellemzőket! A feladattípus első ránézésre nagyon hasonlít az előzőre, csupán itt nem egy eldöntendő kérdésre kell válaszolni, hanem meg kell adni a sorozat egyik, adott tulajdonsággal rendelkező elemét. Kicsit részletesebb, pontosabb vizsgálódás után még az is kiderül, hogy ha e feladatokra az eldöntendő kérdést tennénk fel, akkor biztosan **igen** választ kapnánk.

Azt kell még eldöntenünk, hogy az elemet hogyan adhatjuk meg. Erre két lehetőségünk van: vagy a sorszámát, vagy pedig az értékét adjuk meg. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az előbbi változatból az utóbbi megoldását nagyon könnyen megkaphatjuk, fordítva viszont korántsem ez a helyzet. Emiatt mi az első változatot részesítjük előnyben, ez az általánosabb eset.

Bemenet	: $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $T: H \rightarrow \mathbf{L}$
Kimenet	: $SORSZ \in \mathbf{N}$
ef	: $\exists i\ (1 \le i \le N): T(X_i)$ [és természetesen: $N \ge 1$]
uf	: $1 \le SORSZ \le N$ és $T(X_{SORSZ})$

Az algoritmus:

Függvény:
T: Elemtípus → Logikai

Változók:
N: **Egész** [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
X: **Tömb**(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
SORSZ: **Egész** [az eredmény]

A megoldás sokban fog hasonlítani az előző feladattípus megoldásához, annak az esetnek a vizsgálatát kell kihagyni belőle, amely a keresett tulajdonságú elem nem létezése esetén állította le a megoldás keresését.

```
Kiválasztás(N,X,SORSZ):
  I:=1
  Ciklus amíg nem T(X(I))
    I:=I+1
  Ciklus vége
  SORSZ:=I
Eljárás vége.
```

A megoldásról könnyen megállapíthatjuk, hogy ha több, a kívánt tulajdonsággal rendelkező elem is előfordul a sorozatban, akkor azok közül az elsőt (helyesebben annak sorszámát) adja.

Ebből, mint azt egy korábbi füzetben a specifikáció kapcsán már taglaltuk, az következik, hogy a *program* utófeltétele lehet szigorúbb mint a feladatbeli utófeltétel. Itt ez a következőképpen néz ki:

uf: $1 \le SORSZ \le N$ és $T(X_{SORSZ})$ és $\forall i\ (1 \le i < SORSZ)\ \neg T(X_i)$

Könnyen átalakíthatjuk olyanra is, amely ilyenkor az utolsót adja közülük. Ekkor csupán annyi a teendő, hogy a sorozat elemeit hátulról visszafelé dolgozzuk fel.

Nézzük meg a bevezető feladatok egyikének megoldását!

F12. A legjobb barát (barátnő) névnapja.

```
elemek száma: N
névnapok    : X N db elem
      Rekord(név,névnap)
T(e)        : e.név=barát
```

```
Kiválasztás(N,X,BARÁT,NAP):
  I:=1
  Ciklus amíg X(I).név≠BARÁT
     I:=I+1
  Ciklus vége
  NAP:=X(I).névnap
Eljárás vége.
```

4. (Lineáris) keresés

Foglaljuk össze az előző két programozási tétel feladatát: az új feladattípusban a feltett kérdés az előző kettő mindegyikét tartalmazza!

F13. Ismerjük egy üzlet egy havi forgalmát: minden napra megadjuk, hogy mennyi volt a bevétel és mennyi a kiadás. Adjunk meg egy olyan napot -ha van-, amelyik nem volt nyereséges!

F14. A Budapest-Nagykanizsa vasúti menetrend alapján két adott állomáshoz adjunk meg egy olyan vonatot, amellyel el lehet jutni átszállás nélkül az egyikről a másikra!

F15. Egy tetszőleges (nem 1) természetes számnak adjuk meg egy osztóját, ami nem az 1 és nem is önmaga.

Tehát a közös jellemző, hogy egy adott tulajdonságú elemet kell megadnunk, ha egyáltalán van ilyen. Ha nincs, akkor a válasznak ezt a tényt kell tartalmaznia.

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N
          T:H→L
Kimenet : VAN∈L, SORSZ∈N
ef      : -
uf      : VAN ≡ (∃i (1≤i≤N): T(Xi)) és
          VAN ⇒ 1≤SORSZ≤N és T(X_SORSZ)
```

*Az **algoritmus:***

```
Függvény:
  T: Elemtípus → Logikai
```

```
Változók:
  N: Egész                [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X: Tömb(1..N:Elemtípus)  [a feldolgozandó sorozat elemei]
  VAN: Logikai             [az eredmény - van-e megfelelő elem]
  SORSZ: Egész     [az eredmény - a megfelelő elem sorszáma]
```

Vegyük az *eldöntés* algoritmusát, s egészítsük ki a *kiválasztás*nak megfelelő eredménnyel!

```
Keresés(N,X,VAN,SORSZ):
  I:=1
  Ciklus amíg I≤N és nem T(X(I))
    I:=I+1
  Ciklus vége
  VAN:=(I≤N)
  Ha VAN akkor SORSZ:=I
Eljárás vége.
```

Az egyik kitűzött feladat megoldása a következő lehet:

F13. Nem nyereséges nap megadása.

```
elemek száma: N
bevételek   : B N db elem
kiadások    : K N db elem
T(k-b)      : k-b≥0
```

```
Keresés(N,X,VAN,NAP):
  I:=1
  Ciklus amíg I≤N és
                    K(I)-B(I)<0
     I:=I+1
  Ciklus vége
  NAP:=X(I).névnap
Eljárás vége.
```

,5. Megszámolás

Az előző feladatokban előfordulhatott, hogy több elem is rendelkezik a vizsgált tulajdonsággal. Ekkor érdekes lehet annak megvizsgálása, hogy hány ilyen elem van.

F16. Családok létszámának, illetve jövedelmének alapján állapítsuk meg, hogy hány család él a létminimum alatt!

F17. Egy futóverseny végeredménye határozzuk meg, hogy a versenyzők hány százaléka teljesítette az olimpiai induláshoz szükséges szintet!

F18. Adjuk meg egy szöveg magánhangzóinak számát!

A közös jellemző itt tehát a számlálás. Vegyük észre, hogy a feladatot sorozatszámításként is felfoghatjuk, amelyben 1-eseket kell összeadnunk, de bizonyos feltételtől függően.

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$

$T: H \to \mathbf{L}$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, & ha\ T(x) \\ 0, & egyébként \end{cases}$.

Kimenet : DB∈$\mathbf{N}_0$
ef : -
uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$

z *algoritmus:*

```
Függvény:
  T: Elemtípus → Logikai
Változók:
  N : Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X : Tömb(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
  DB: Egész              [az eredmény - a megfelelő elemek száma]
```

A feladat sorozatszámítás (sőt összegzés), tehát egy ciklust kell alkalmazni a megoldáshoz. A ciklus belsejében egy unió típusú (χ függvény értéke) adatot kell feldolgozni, ezt egy elágazással tehetjük meg.

```
Megszámolás(N,X,DB):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor DB:=DB+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Nézzük meg két feladat megoldását!

F16. Létminimum alattiak száma.

Minden családi létszámhoz megadható az a jövedelem, amely a létminimumhoz kell, a megoldásban ezt használjuk fel.

```
elemek száma: N
létszámok   : L N db elem
jövedelmek  : J N db elem
létminimumok: MIN sorozat
T(1-j)      : j-MIN(1)≥0
```

```
Megszámolás(N,J,L,DB):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha J(I)≤MIN(L(I))
          akkor DB:=DB+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

F17. Olimpiai indulási szintet hány százalék teljesítette?

A feladat megoldása egy megszámolás, majd az eredményből és a résztvevők számából százalékot számolunk.

```
elemek száma: N
idők         : ID N db elem
T(id)        : id≤SZINT
```

```
Megszámolás(N,ID,SZAZ):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha ID(I)≤SZINT
          akkor DB:=DB+1
  Ciklus vége
  SZAZ:=Kerekít(100*DB/N)
Eljárás vége.
```

6. Maximumkiválasztás

A sorozatszámítás egy újabb speciális esetével ismerkedünk meg a következő feladattípusban, először néhány feladaton keresztül.

F19. Egy kórházban megmérték minden beteg lázát, adjuk meg, hogy ki a leglázasabb!

F20. Egy család havi bevételei és kiadásai alapján adjuk meg, hogy melyik hónapban tudtak a legtöbbet megtakarítani!

F21. Egy osztály tanulói nevei alapján adjuk meg a névsorban legelső tanulót!

Közös jellemzőjük e feladatoknak, hogy minden esetben egy sorozat elemei közül kell kiválasztani a legnagyobbat (illetve a legkisebbet). Itt is meggondolandó -mint a *kiválasztás*nál-, hogy elem értéket vagy pedig elem sorszámot várunk eredményként. Az ottani gondolatmenethez hasonlóan most is a sorszám meghatározását választjuk.

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N, H rendezett halmaz (∃<,≤ reláció)
Kimenet : MAX∈N
ef      : N≥1
uf      : 1≤MAX≤N és ∀i (1≤i≤N): X_MAX≥X_i
```

Az algoritmus:

```
Változók:
  N   : Egész          [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X   : Tömb(1..N:Elemtípus)[a feldolgozandó sorozat elemei]
  MAX: Egész           [a maximális értékű elem sorszáma]
```

A sorozatszámításnál használjuk **F** függvényként a $MAX(A_1,A_2,...A_N)$ függvényt! Ehhez az **f** függvényt a következőképpen használjuk:

$$f(x,y):=max(x,y).$$

Legyen ehhez $F_0:=A_1$! A választás megengedhető, annak ellenére, hogy nem feltétlenül lesz az A_1 *neutrális* a *max* műveletre nézve! Ugyanis a korrekt választás a H minimum eleme lenne, ami vagy ismert, vagy nem. Egy tetszőleges A-beli elem *neutrális*nak akkor fog tűnni, ha a *max* operátor értelmezési tartományát leszűkítjük a H azon rész-

halmazára, amely az adott elemnél nem kisebb értékű elemeket tartalmazza. Ennek is eleme lesz garantáltan a sorozat maximális eleme. Tehát hibát nem követünk el, ha F_0-nak az A_1-t tekintjük. Alakítsuk át úgy a sorozatszámítás megoldását, hogy ne értéket, hanem sorszámot kapjunk eredményül! (Annyi észre venni valónk van csak az algoritmizáláskor, hogy most a sorozat a 2. elemmel kezdődik.)

```
Maximumkiválasztás(N,X,MAX):
  MAX:=1
  Ciklus I=2-től N-ig
    Ha X(MAX)<X(I) akkor MAX:=I
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Sok esetben túlságosan sok időbe kerül a sorozat egy elemének meghatározása. Ekkor olyan megoldást készíthetünk, amely a maximális értéket határozza meg, vagy pedig a sorszámot is és az értéket is.

```
Maximumkiválasztás(N,X,MAX,MAXERT):
  MAX:=1: MAXERT:=X(1)
  Ciklus I=2-től N-ig
    Ha MAXERT<X(I) akkor MAX:=I: MAXERT:=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Ha a feladat minimumkiválasztás, akkor pedig nincs más teendőnk, mint az elágazás feltételében szereplő < reláció átírása >-ra. Erre példa az egyik kitűzött feladat megoldása.

F21. A névsorban legelső tanuló.

```
elemek száma: N
tanulók neve: X N db elem
```

```
Minimum(N,X,MIN,MEV):
  MIN:=1: NEV:=X(1)
  Ciklus I=2-től N-ig
    Ha NEV>X(I)
      akkor MIN:=I:NEV:=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

II. Összetett programozási tételek

A soronkövetkező feladattípusokban már a bemeneti és a kimeneti oldalon is egy-egy sorozat jelenik meg, majd a későbbiekben valamelyiket több sorozattal helyettesítjük.

1. Másolás

Ezt a feladattípust is konkrét példákkal kezdjük, mint tettük azt az előző fejezetben.

F22. Egy osztály tanulóinak átlageredménye alapján határozzuk meg, hogy bizonyítványukba *jeles, jó, közepes* vagy *elégséges* kerül-e! Tegyük fel, hogy bukott tanuló nincs!

F23. Egy szöveg minden magánhangzóját cseréljük ki az *e* betűre!

E feladatok közös jellemzője, hogy az eredmény mindig ugyanannyi elemszámú, mint a bemenet volt, s az i. tagját a bemenet i. tagjából lehet meghatározni. Tehát a bemenő sorozatot le kell másolni, s közben egy -elemre vonatkozó- átalakítást lehet végezni rajta.[1]

Bemenet	$N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $f: H \to G$
Kimenet	$X \in G^N$
ef	-
uf	$\forall i \ (1 \le i \le N): Y_i = f(X_i)$

Az algoritmus:

Függvény:

```
f: H_Elemtípus → G_Elemtípus
```

Változók:

```
N : Egész                    [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
X : Tömb(1..N:H_Elemtípus)   [a feldolgozandó sorozat]
Y : Tömb(1..N:G_Elemtípus)   [a feldolgozott sorozat]
```

A bemenő sorozatból az eredmény elemenként kiszámítható, így nagyon egyszerű megoldást kapunk.

[1] Gyakran e tulajdonságot hívják *elemenkénti feldolgozhatóság*nak. Pontos definíciójával az Adatfeldolgozásról szóló kötetben foglalkozunk.

```
Másolás(N,X,Y):
  Ciklus I=1-től N-ig
    Y(I):=f(X(I))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A fejezet elején szereplő példák közül az egyik megoldása:

F23. Magánhangzóra cserélés.

```
elemek száma: N
bemenet     : X N db elem
kimenet     : Y N db elem
f('b')      : 'e',ha magán(b)
              különben 'b'
```

```
Másolás(N,X,Y):
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha magán(X(I))
      akkor  Y(I):='e'
    különben Y(I):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

2. Kiválogatás

Nem minden esetben kell lemásolni a teljes bemenő sorozatot, hanem annak csupán egy részére kell korlátozni a vizsgálatot. Legegyszerűbb esetben a "vizsgálat" mindössze elemmásolás. Ilyen feladatok szerepelnek e fejezetben.

F24. Egy személyzeti nyilvántartásban emberek neve és személyi száma szerepel, adjuk meg a 20 évnél fiatalabb lányokat!

F25. Adjuk meg egy természetes szám összes osztóját!

F26. Adjuk meg egy osztály azon tanulóit, akik jeles átlagúak!

A feladat részben a keresésre hasonlít, részben pedig a megszámlálásra. Adott tulajdonságú elemet kell megadni, de nem egyet, hanem az összeset; illetve nem megszámolni kell az adott tulajdonságú elemeket, hanem megadni.

Az eredmény tárolásához egy új tömböt használunk, amelynek elemszámát előre sajnos nem tudjuk megállapítani, csupán egy felső korlátot ismerünk: a lehetséges elemek számát.

Többféle megoldást készíthetnénk a feladatra. Az első változatban a keresett elemek sorszámait gyűjtjük ki egy vektorba. A megoldás hasonlít a megszámolásra, csupán a számolás mellett még az elemek sorszámait is feljegyezzük. Éppen ezért e változat neve: *kiválogatás kigyűjtéssel.*

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$

$$T: H \to \mathbf{L},\quad \chi: H \to \{0,1\},\quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & ha\ T(x) \\ 0, & egyébként \end{cases}$$

Kimenet : $DB \in \mathbf{N}_0$, $Y \in \{1..N\}^N$
ef : -
uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és $Y \subseteq \{1..N\}$ és $\forall i\ (1 \le i \le DB)$: $T(X_{Y_i})$

Az algoritmus:

```
Függvény:
  T: Elemtípus → Logikai
Változók:
  N: Egész                [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X: Tömb(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
  DB: Egész                          [a megfelelő elemek száma]
  Y: Tömb(1..N:Egész)       [a megfelelő elemek sorszámai]
Kiválogatás(N,X,DB,Y):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor DB:=DB+1: Y(DB):=I
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Minimális változtatásra lenne szükség, ha nem a sorszámokat, hanem magukat az elemeket kellene kigyűjteni. Az `Y(DB):=I` értékadás helyett az `Y(DB):=X(I)` kell, érdemes a specifikáció átalakulását is meggondolni:

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és $Y \subseteq X$ és $\forall i\ (1 \le i \le DB)$: $T(Y_i)$

A második változat, a *kiválogatás kiírással* még ennél is egyszerűbb, ebben nincs szükség számolásra, a megtalált elemet azonnal kiírhatjuk. Ez természetesen csak akkor alkalmazható, ha a kiválogatott elemekre további feldolgozás miatt nincs szükség.

```
Kiválogatás(N,X,DB,Y):
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor Ki: X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A harmadik változatban az elemeket gyűjtjük ki, de -feltételezve, hogy az eredeti sorozatra már nincs szükség- ezeket az eredeti vektorban hagyjuk - ez lesz a *kiválogatás helyben*. Ehhez módosítjuk az utófeltételt.

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_{be_i})$ és $X_{ki} \subseteq X_{be}$ és $\forall i\ (1 \le i \le DB)$: $T(X_{ki_i})$

```
Kiválogatás(N,X,DB,Y):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor DB:=DB+1: X(DB):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Az utolsó változatban sem lesz szükség a kihagyott elemekre, de a megmaradtakat sem akarjuk mozgatni. Emiatt a felesleges elemek helyére egy speciális értéket teszünk, ezzel jelölve a kihagyásukat. Természetesen e megoldás akkor célszerű, ha a későbbi feldolgozások során e speciális érték vizsgálata jóval egyszerűbb, mint maga a kiválogatás volt. E módszer neve: *kiválogatás kihúzással.*

```
Kiválogatás(N,X,DB,Y):
   Ciklus I=1-től N-ig
    Ha nem T(X(I)) akkor X(I):=spec. érték
   Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Nézzük meg egy feladat megoldását!

F26. Jeles átlagú tanulók neve.

```
elemek száma: N
tanulók     : X N db elem
      Rekord(név,átlag)
jelesszám   : DB
jelesek     : NEV N db elem
```

```
Kiválogatás(N,X,DB,NEV):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha X(I).átlag≥4
      akkor DB:=DB+1
            NEV(DB):=X(I).név
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

3. Szétválogatás

Feltehető az előző fejezetbeli feladattípussal kapcsolatban az a kérdés, hogy mi lesz a ki nem válogatott elemekkel. E fejezetben erre a kérdésre adunk választ.

F27. Adott N db természetes szám, válogassuk szét a párosakat és a páratlanokat!

F28. Az osztály tanulóit névsoruk alapján válogassuk szét lányokra, illetve fiúkra!

F29. Az osztály tanulói félévi átlageredményük alapján válogassuk szét jelesekre, jókra, közepesekre, elégségesekre, valamint elégtelenekre!

Ez egy új feladattípusosztály első tagja: itt **egy sorozathoz több sorozatot kell rendelni.**

E feladatok mindegyike megfogalmazható úgy, hogy végezzünk el egymás után valahány kiválogatást. Az első két feladatban pontosan kettőről van szó, az utolsóban több-

ről, de ez utóbbi megoldható úgy, hogy először válogassuk szét jelesekre és a többiekre, majd a többieket jókra és ... Ezek alapján megállapítható, hogy a szétválogatást elég megfogalmazni két sorozatra, s ha többről van szó, akkor egyszerűen csak többször kell alkalmazni.

A kétfelé szétválogatást azonban felesleges két kiválogatással megoldani, ugyanis egyértelmű, hogy amit az első menetben nem válogattunk ki, pontosan azok fognak szerepelni a másodikban.

Az első változatban a kétféle elemet két vektorba válogatjuk szét, ezek elemszáma sajnos mindkét esetben az eredeti vektor elemszáma kell legyen, ugyanis elképzelhető, hogy az összes elemet az egyik vektorba kell majd elhelyezni.

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$

$T: H \to \mathbf{L}$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, & ha\ T(x) \\ 0, & egyébként \end{cases}$

Kimenet : $DBY, DBZ \in \mathbf{N}_0$, $Y, Z \in H^N$

ef : -

uf : $DBY = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és $Y \subseteq X$ és $\forall i\ (1 \le i \le DBY): T(Y_i)$ és

$DBZ = N - DBY$ és $Z \subseteq X$ és $\forall i\ (1 \le i \le DBZ): \neg T(Z_i)$

Nézzük tehát a szétválogatást két tömbbe!

Az algoritmus:

```
Függvény:
  T: Elemtípus → Logikai
Változók:
  N: Egész                [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X: Tömb(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
  DBY,DBZ: Egész                    [a megfelelő elemek száma]
  Y,Z: Tömb(1..N:Egész)       [a megfelelő elemek sorszámai]
Szétválogatás(N,X,DBY,Y,Z,DBZ):
  DBY:=0: DBZ:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor  DBY:=DBY+1: Y(DBY):=X(I)
               különben DBZ:=DBZ+1: Z(DBZ):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Világos, hogy a két vektor alkalmazásával sok felesleges helyet használunk, hiszen 2*N helyet foglalunk pedig összesen csak N-re van szükségünk.

Ha az elemeket egyetlen tömbbe helyezzük el, mégpedig úgy, hogy a T tulajdonságúakat a tömb elejétől, a nem T tulajdonságúakat pedig a végétől kezdve helyezzük el, akkor N helyet megtakaríthatunk. Ez lesz a *szétválogatás egy tömbbe*.

```
Szétválogatás(N,X,DBY,Y,Z,DBZ):
  DBY:=0: INDZ:=N+1
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor  DBY:=DBY+1: Y(DBY):=X(I)
               különben INDZ:=INDZ-1: Y(IND):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Vegyük észre, hogy ebben a megoldásban a nem T tulajdonságú elemek sorrendje az eredetihez képest éppen megfordul.

A kiválogatáshoz hasonlóan itt is megoldhatjuk a *helyben szétválogatást* is, ha nincs szükség az elemek eredeti sorrendjére. Ehhez az utófeltételt módosítani kell.

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_{be_i})$ és X_{ki}=Permutáció(X_{be}) és
$\forall i$ ($1 \le i \le DB$): T(X_i) és $\forall i$ ($DB < i \le N$): $\neg$T(X_i)

Egyszerű lenne a következő algoritmus: Elindulunk a tömbben elölről és hátulról, s keresünk olyan elemeket, amelyeket fel kell cserélni. Ha találunk, akkor cserélünk, majd folytatjuk a keresést. Mi ennél egy kicsit hatékonyabb változatot fogunk vizsgálni.

A megoldást úgy végezzük el, hogy a tömb első elemét kivesszük a helyéről. Az utolsó elemtől visszafelé keresünk egy olyat, amely T tulajdonságú, s ezt előre hozzuk a kivett elem helyére. Ezután a hátul felszabadult helyre elölről keresünk egy nem T tulajdonságú elemet, s ha találtunk azt hátratesszük. Mindezt addig végezzük, amíg a tömbben két irányban haladva össze nem találkozunk.

```
Szétválogatás(N,X,DB):
  E:=1: U:=N: segéd:=X(E)
  Ciklus amíg E<U
    Ciklus amíg E<U és nem T(X(U))
      U:=U-1                        [T tul. elem keresése]
    Ciklus vége
    Ha E<U akkor X(E):=X(U): E:=E+1
                Ciklus amíg E<U és T(X(E))
                  E:=E+1        [nem T tul. elem keresése]
                Ciklus vége
                Ha E<U akkor X(U):=X(E): U:=U-1
    Elágazás vége
  Ciklus vége
  X(E):=segéd
  Ha T(X(E)) akkor DB:=E különben DB:=E-1
Eljárás vége.
```

Nézzük meg az egyik feladat megoldását, a szétválogatott elemeket egy tömbben elhelyezve elölről, illetve hátulról!

F27. Párosak-páratlanok szétválogatása

```
elemek száma: N
számok      : X N db elem
páros-szám  : DB
eredmény    : Y N db elem
T(i)        : páros(i)
```

```
Szétválogatás(N,X,DB,Y):
  DB:=0: IND:=N+1
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha páros(X(I))
      akkor  DB:=DB+1
             Y(DB):=X(I)
    különben IND:=IND-1
             Y(IND):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

4. Metszet

A következő három feladattípus újabb feladattípusosztályba tartozik, ezekben **több sorozathoz kell egyet rendelni**.

F30. Adjuk meg két természetes szám osztói ismeretében az összes közös osztójukat!

F31. Nyáron és télen is végeztünk madármegfigyeléseket a Balatonon. Ismerjük, hogy nyáron, illetve télen mely madárfajok fordultak elő. Állapítsuk meg ezek alapján, hogy melyek a nem költöző madarak!

F32. Négy ember heti szabad estéi ismeretében állapítsuk meg, hogy a héten melyik este mehetnek el együtt moziba!

Közös jellemzőjük e feladatoknak, hogy valahány -alapesetben itt is kettő- halmaz elemei közül azokat kell *kiválogat*nunk, amelyek mindegyikben előfordulnak. E halmazok elemeit -a többi programozási tétel tárgyalásmódjához hasonlóan- egy sorozatban (tömbben) felsoroljuk.

Kérdés: Miért nem a sorozatszámítás tételt alkalmazzuk e feladat megoldására?

Válasz: A sorozatszámítás tételben halmazokkal végezhettünk műveleteket, itt pedig olyan sorozatokkal, amelyek halmazelemeket tartalmaznak felsorolva. Emiatt a sorozatszámításban említett, két halmaz közötti metszetműveletet így lehet végrehajtani, ha a halmazokat sorozatként ábrázoljuk.

Bemenet : $N, M \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ 0, & \textit{egyébként} \end{cases}$.

Kimenet : $DB \in \mathbf{N}_0$, $Z \in H^{\min(N,M)}$

ef : X halmazfelsorolás és Y halmazfelsorolás

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és Z halmazfelsorolás és
$\forall i$ $(1 \le i \le DB)$: $Z_i \in X$ és $Z_i \in Y$.

A megoldásban válogassuk ki X olyan elemeit, amelyek benne vannak Y-ban! Az algoritmus tehát egy kiválogatás, amely a belsejében egy eldöntést tartalmaz.

Az algoritmus:

```
Változók:
  N,M: Egész                    [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X,Y: Tömb(1..N:Elemtípus)     [feldolgozandó sorozatok elemei]
  DB: Egész                     [a közös elemek száma]
  Z: Tömb(1..min(N,M):Egész)    [a közös elemek]
Metszet(N,X,M,Y,DB,Z):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig                                   [kiválogatás]
    J:=1
    Ciklus amíg J≤M és X(I)≠Y(J)                        [eldöntés]
      J:=J+1
    Ciklus vége
    Ha J≤M akkor DB:=DB+1: Z(DB):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

E feladattípus hasonlítható több, az elemi programozási tételek között szerepelt feladattípushoz, ha a feladatot némileg módosítjuk.

Eldöntés: van-e a két halmaznak közös eleme?

Kiválasztás: adjuk meg a két sorozat egyik közös elemét (ha tudjuk, hogy biztosan van ilyen)!

Keresés: ha van, akkor adjuk meg a két sorozat egyik közös elemét!

Megszámolás: hány közös eleme van a két sorozatnak?

Nézzük meg ezek közül például a *keresést*!

Bemenet : $N,M \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$

Kimenet : $VAN \in \mathbf{L}$, $E \in H$

ef : X halmazfelsorolás és Y halmazfelsorolás

uf : $VAN = \exists\, i,j$ $(1 \le i \le N$ és $1 \le j \le M)$: $X_i = Y_j$ és
$VAN \Rightarrow \exists\, i,j$ $(1 \le i \le N$ és $1 \le j \le M)$: $E = X_i = Y_j$

A megoldásban keressünk X-ben egy olyan elemeit, amely benne van Y-ban! Az algoritmus tehát egy keresés, amely a belsejében egy eldöntést tartalmaz.

```
Változók:
  N,M: Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X,Y: Tömb(1..N:Elemtípus)[feldolgozandó sorozatok elemei]
  VAN: Logikai                              [van-e közös elem]
  E: Elemtípus                                [egy közös elem]
Metszetbeli elem(N,X,M,Y,VAN,E):
  I:=1: VAN:=hamis
  Ciklus amíg I≤N és nem VAN
    J:=1
    Ciklus amíg J≤M és X(I)≠Y(J)
      J:=J+1
    Ciklus vége
    Ha J≤M akkor VAN:=igaz: E:=X(I) különben I:=I+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

5. Egyesítés (unió)

Ha halmazokról van szó, akkor a metszet mellett természetesen meg kell jelennie az uniónak is.

F33. Két szám prímosztóinak ismeretében adjuk meg legkisebb közös többszörösük prímosztóit!

F34. Egy iskola két földrajztanára órarendjének ismeretében adjuk meg azokat az órákat, amelyben valamelyikük tud egy órát helyettesíteni!

Ebben a feladattípusban tehát azon elemekre vagyunk kíváncsiak, amelyek két halmaz közül legalább az egyikben előfordulnak.

Bemenet : $N,M \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(y) = \begin{cases} 1, & y \notin X \\ 0, & \textit{egyébként} \end{cases}$.

Kimenet : $DB \in \mathbf{N}_0$, $Z \in H^{N+M}$

ef : X halmazfelsorolás és Y halmazfelsorolás

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és Z halmazfelsorolás és
$\forall i \ (1 \le i \le DB)$: $Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$.

A megoldásban másoljuk le X elemeit Z-be, majd válogassuk ki Y olyan elemeit, amelyek nincsenek benne X-ben! Az algoritmus tehát egy másolás, majd egy kiválogatás, amely a belsejében egy eldöntést tartalmaz.

```
Változók:
  N,M: Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X,Y: Tömb(1..N:Elemtípus)[feldolgozandó sorozatok elemei]
  DB: Egész                          [a közös elemek száma]
  Z: Tömb(1..N+M:Egész)                    [a közös elemek]
Egyesítés(N,X,M,Y,DB,Z):
  Z:=X: DB:=N                                      [másolás]
  Ciklus J=1-től M-ig                           [kiválogatás]
    I:=1
    Ciklus amíg I≤N és X(I)≠Y(J)                  [eldöntés]
      I:=I+1
    Ciklus vége
    Ha I>N akkor DB:=DB+1: Z(DB):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A példák megoldása helyett itt is egy alkalmazást nézzünk: egy sorozatból készítsünk halmazfelsorolást! A feladat tehát az, hogy másoljuk le egy sorozat elemeit, de az azonos értékű elemek az eredményben csak egyszer szerepeljenek.

Ez egy furcsa egyesítés, $Z=Z \cup X$ képlettel írhatnánk le, azaz azokat az elemeket vegyük bele X-ből az eredménybe,amelyek még nem szerepelnek benne.

```
Halmazfelsorolás_készítés(N,X,DB,Z):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    J:=1
    Ciklus amíg J≤DB és X(I)≠Z(J)
      J:=J+1
    Ciklus vége
    Ha J>DB akkor DB:=DB+1: Z(DB):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

6. Összefuttatás (rendezettek uniója)

Bizonyos esetekben az unió feladattípus megoldása az előző fejezetbelinél hatékonyabb lehet. Ezt is konkrét feladatokon keresztül vizsgáljuk.

F35. Egy osztály lány-, illetve fiútanulóinak névsora alapján állítsuk elő az osztálynévsort!

F36. Egy iskolában négy szakkörre járnak tanulók (van aki többre is). A szakkörnévsorok alapján állítsuk elő a szakkörre járó tanulók névsorát!

Megállapíthatjuk, hogy az általános egyesítéshez képest itt az a specialitás, hogy mindegyik sorozatként ábrázolt halmaz rendezett, s az eredménynek is rendezettnek kell lenni.

Ha nem két sorozatról van szó, akkor az a korábbiaknak megfelelően visszavezethető két sorozat feldolgozására.

Bemenet : $N,M \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $Y \in H^M$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(y) = \begin{cases} 1, & y \notin X \\ 0, & \textit{egyébként} \end{cases}$

Kimenet : $DB \in \mathbf{N}_0$, $Z \in H^{N+M}$

ef : X halmazfelsorolás és Y halmazfelsorolás és X rendezett és Y rendezett

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és Z halmazfelsorolás és Z rendezett és $\forall i$ $(1 \le i \le DB)$: $Z_i \in X$ vagy $Z_i \in Y$.

A megoldásban haladjunk párhuzamosan a két sorozatban! Az eredmény első eleme vagy X_1, vagy Y_1 lesz. Amelyik kisebb, azt az eredménysorozatba tesszük, abban a sorozatban kell továbblépni egy elemmel, s újra egy-egy elemet hasonlítani. Ha egyenlőek voltak, akkor az egyiket másoljuk az eredménybe, majd mindkét sorozatban továbblépünk. Ha az egyiknek a végére értünk, akkor a másikat minden változtatás nélkül az eredménybe másoljuk.

Változók:

```
  N,M: Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X,Y: Tömb(1..N:Elemtípus) [feldolgozandó sorozatok elemei]
  DB: Egész                          [a közös elemek száma]
  Z: Tömb(1..N+M:Egész)                    [a közös elemek]
Összefuttatás(N,X,M,Y,DB,Z):
  I:=1: J:=1: DB:=0
  Ciklus amíg I≤N és J≤M
    DB:=DB+1
    Elágazás
      X(I)<Y(J) esetén Z(DB):=X(I): I:=I+1
      X(I)=Y(J) esetén Z(DB):=X(I): I:=I+1: J:=J+1
      X(I)>Y(J) esetén Z(DB):=Y(J): J:=J+1
    Elágazás vége
  Ciklus vége
  Ciklus amíg I≤N
    DB:=DB+1: Z(DB):=X(I): I:=I+1
  Ciklus vége
  Ciklus amíg J≤M
    DB:=DB+1: Z(DB):=Y(J): J:=J+1
   Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Észrevehetjük a megoldást elemezve, hogy ha olyan szerencsénk volt, hogy X(N)= Y(M), akkor az utolsó két ciklusra tulajdonképpen nincs is szükség, hiszen nem maradt másolnivaló. Az a baj, hogy ez a szerencsés eset viszonylag ritkán fordul elő.

A második megoldásváltozatban mi magunk idézzük elő e szerencsét: mindkét sorozat végére egy nagyon nagy (az adott típus legnagyobb értéke), de egyező elemet teszünk.

```
Összefuttatás(N,X,M,Y,DB,Z):
  I:=1: J:=1: DB:=0
  X(N+1):=+∞: Y(M+1):=+∞    [az elemtípus maximális értéke]
  Ciklus amíg I<N+1 vagy J<M+1
    DB:=DB+1
    Elágazás
      X(I)<Y(J) esetén Z(DB):=X(I): I:=I+1
      X(I)=Y(J) esetén Z(DB):=X(I): I:=I+1: J:=J+1
      X(I)>Y(J) esetén Z(DB):=Y(J): J:=J+1
    Elágazás vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Ebben a megoldásban a hozzávett fiktív elem nem kerül be az eredménybe. Ha szükségünk lenne rá, a ciklus vége után még elhelyezhetnénk az eredmény végére.

A harmadik változatban kihasználjuk azt a -nem minden feladatban meglevő- specialitást, hogy a két sorozatban biztosan nincs közös elem. Ilyen például a fejezet elején szereplő F35 feladat. Ezt az altípust a megkülönböztetés érdekében **összefésülésnek** nevezzzük.

```
Összefésülés(N,X,M,Y,DB,Z):
  I:=1: J:=1: DB:=0
  X(N+1):=+∞: Y(M+1):=+∞    [az elemtípus maximális értéke]
  Ciklus amíg I<N+1 vagy J<M+1
    DB:=DB+1
    Ha X(I)<Y(J) akkor  Z(DB):=X(I): I:=I+1
                 különben Z(DB):=Y(J): J:=J+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

III. Rendezések

A sorozathoz sorozatot rendelő feladattípus osztály egyik tagját külön vizsgáljuk e fejezetben.

Az alapfeladat egy N elemű sorozat nagyság szerinti sorba rendezése. A sorozat elemei olyanok, amelyekre a $<,\leq$ relációk léteznek. Feltesszük a feladatok mindegyikében, hogy a sorozathoz létezik indexelés művelet, s ezt a megoldásban ki is használjuk. Az eredmény a módszerek jelentős részében helyben keletkezik, az eredeti sorrend elvész.

Konkrét feladatok ismertetése és megoldása helyett ebben a fejezetben egy számpéldát fogunk végignézni az egyes módszereknél. E számsorozat -egy kivétellel- a következő lesz: 5, 3, 9, 1, 7.

Bemenet	: $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$
Kimenet	: $X \in H^N$
ef	: -
uf	: X_{ki} rendezett és X_{ki}=Permutáció(X_{be}).

Az algoritmus:

```
Változók:
  N  : Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X  : Tömb(1..N:H_Elemtípus)      [a feldolgozandó sorozat]
```

Az egyes módszereket összehasonlítjuk tárigény (a rendezésben résztvevő tároló helyek száma), valamint végrehajtási idő (hasonlítások száma, mozgatások száma) szerint. A helyfoglalásba nem számítjuk bele a ciklusváltozókat, a végrehajtási időbe pedig ezek növelését, vizsgálatát, hiszen ezek mérete és ideje nem függ a rendezendő elemek típusától.

A hasonlítások és a mozgatások száma néha nem függ a rendezendő elemek értékétől, a legtöbb esetben azonban igen, így csak minimális és maximális számukról beszélhetünk.

1. Egyszerű cserés rendezés

Az első módszer a következő ötletre épül. Hasonlítsuk össze az első elemet a sorozat összes többi mögötte levő elemével, s ha valamelyik kisebb nála, akkor cseréljük meg

azzal! Ezzel elérhetjük, hogy a sorozat első helyére a legkisebb elem kerül. Folytassuk ugyanezen elven a sorozat második elemével, utoljára pedig az utolsóelőttivel.

```
Rendezés(N,X):
  Ciklus I=1-től N-1-ig
    Ciklus J=I+1-től N-ig
      Ha X(I)>X(J) akkor Csere(X(I),X(J))
    Ciklus vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A belső ciklus ciklusfeltétele kiértékelése előtt a sorozat:

I=1 ⇒	5, 3, 9, 1, 7
	3, 5, 9, 1, 7
	3, 5, 9, 1, 7
	1, 5, 9, 3, 7
	1, 5, 9, 3, 7
I=2 ⇒	1, 5, 9, 3, 7
	1, 5, 9, 3, 7
	1, 3, 9, 5, 7
	1, 3, 9, 5, 7
I=3 ⇒	1, 3, 9, 5, 7
	1, 3, 5, 9, 7
	1, 3, 5, 9, 7
I=4 ⇒	1, 3, 5, 9, 7
	1, 3, 5, 7, 9

Helyfoglalás:	N+1	
Hasonlítások száma:	N*(N-1)/2	$O(n^2)$[1]
Mozgatások száma:	0 - 3*N*(N-1)/2	$O(n^2)$
	[a csere mindig 3 mozgatás]	

2. Minimumkiválasztásos rendezés

Az előző -egyszerű- módszer hibája a sok felesleges csere. Célszerűbb lenne az aktuális első elemet a mögötte levők közül egyedül a legkisebbel cserélni. Ehhez a rendező ciklus belsejében cserék helyett egy minimumkiválasztást kell csinálni.

```
Rendezés(N,X):
  Ciklus I=1-től N-1-ig
    MIN:=I
    Ciklus J=I+1-től N-ig
      Ha X(MIN)>X(J) akkor MIN:=J
    Ciklus vége
    Csere(X(I),X(MIN))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Itt a számpéldát a külső ciklus ciklusfeltételének kiértékelése előtt vizsgáljuk:

[1] A nagy ordó(x) a matematikában szokásos jelölés, jelentése: valamilyen jellemző értékét kifejező polinom legmagasabb hatványkitevőjű tagja x-szel arányos, pl. $O(x^2)$ ax^2+bx+c típusú mennyiséget jelöl.

I=1 ⇒ 5, 3, 9, 1, 7	**Helyfoglalás**: N+1
I=2 ⇒ 1, 3, 9, 5, 7	**Hasonlítások száma**: N*(N-1)/2 $O(n^2)$
I=3 ⇒ 1, 3, 9, 5, 7	**Mozgatások száma**: 3*(N-1) O(n)
I=4 ⇒ 1, 3, 5, 9, 7	

Érdekessége e módszernek az, hogy a mozgatások száma szerencsétlen esetben rosszabb lehet, mint az előzőé, amelynek javításaként keletkezett. Ez amiatt van, hogy itt a külső ciklusban mindenképpen cserélünk. Meg lehetne ugyan vizsgálni, hogy érdemes-e cserélni, de ez a vizsgálat a legtöbb esetben növelné a futási időt.

3. Buborékos rendezés

Most egy másik rendezési alapelvet vizsgálunk meg: hasonlítsuk egymással a szomszédos elemeket, s ha a sorrendjük nem jó, akkor cseréljük meg őket!

Ezzel a módszerrel egy ciklusiépés lefutása alatt a legnagyobb elem biztosan a sorozat végére kerül, s ezen kívül a nagyobb értékű elemek hátrafelé, a kisebbek pedig előrefelé mozdulnak el (innen van a buborékmódszer elnevezés).

```
Rendezés(N,X):
  Ciklus I=N-től 2-ig -1-esével
    Ciklus J=1-től I-1-ig
      Ha X(J)>X(J+1) akkor Csere(X(J),X(J+1))
    Ciklus vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Újra a belső ciklusnál nézzük a konkrét rendezési példát:

I=5 ⇒ 5, 3, 9, 1, 7	**Helyfoglalás**: N+1
3, 5, 9, 1, 7	**Hasonlítások száma**: N*(N-1)/2 $O(n^2)$
3, 5, 9, 1, 7	**Mozgatások száma**: 0 - 3*N*(N-1)/2 $O(n^2)$
3, 5, 1, 9, 7	
3, 5, 1, 7, 9	
I=4 ⇒ 3, 5, 1, 7, 9	
3, 5, 1, 7, 9	
3, 1, 5, 7, 9	
3, 1, 5, 7, 9	
I=3 ⇒ 3, 1, 5, 7, 9	
1, 3, 5, 7, 9	
1, 3, 5, 7, 9	
I=2 ⇒ 1, 3, 5, 7, 9	
1, 3, 5, 7, 9	

Megállapíthatjuk, hogy a fenti várakozásunk ellenére a hatékonysági jellemzők egyáltalán nem javultak.

4. Javított buborékos rendezés

Az előző módszer azért nem váltotta be reményeinket, mert nem használtuk ki benne, hogy az elemek a helyük felé elmozdultak. A legegyszerűbb esetben például, ha a belső ciklus egy lefutása alatt egyáltalán nem volt csere, akkor felesleges minden további hasonlítás, a rendezéssel készen vagyunk. Ha volt csere, de például a legutolsó a sorozat közepénél volt, akkor ebből tudhatjuk, hogy a sorozat a közepe után biztosan kész, rendezett, s csak az előtte levő résszel kell foglalkozni.

Figyeljük tehát minden menetben a legutolsó csere helyét, s a következő menetben csak addig rendezzünk! (Át kell térni 'amíg'-os ciklusra.)

```
Rendezés(N,X):
  I:=N
  Ciklus amíg I≥2
    CS:=0
    Ciklus J=1-től I-1-ig
      Ha X(J)>X(J+1) akkor Csere(X(J),X(J+1)): CS:=J
    Ciklus vége
    I:=CS
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Az előző módszer számpéldájából sorok maradnak ki:

I=5 ⇒	5, 3, 9, 1, 7
	3, 5, 9, 1, 7
	3, 5, 9, 1, 7
	3, 5, 1, 9, 7
	3, 5, 1, 7, 9
I=4 ⇒	3, 5, 1, 7, 9
	3, 5, 1, 7, 9
	3, 1, 5, 7, 9
	3, 1, 5, 7, 9
I=2 ⇒	1, 3, 5, 7, 9
	1, 3, 5, 7, 9

Helyfoglalás: N+1

Hasonlítások száma: N-1 - N*(N-1)/2 $O(n^2)$

Mozgatások száma: 0 - 3*N*(N-1)/2 $O(n^2)$

A hasonlítások számában javulást látunk, az igazi javulás azonban nem a minimális és a maximális, hanem az átlagos végrehajtási időben van.

5. Beillesztéses rendezés

Újabb rendezési elvvel ismerkedünk meg. Az eddigi módszerek mindegyike olyan volt, hogy a sorozatot felosztotta egy már kész, rendezett szakaszra, s a rendezést a másik szakasz elemei között folytatta. Másik jellemzőjük volt, hogy a rendezés elkezdéséhez már az összes elemnek rendelkezésre kellett állnia.

Most a kártyakeveréshez hasonló elvből indulunk ki: egyetlen elem mindig rendezett; ha van egy rendezett részsorozatunk, akkor abba a nagyság szerinti helyére illesszük be a soron következő elemet!

```
Rendezés(N,X):
  Ciklus I=2-től N-ig
    J:=I-1
    Ciklus amíg J>0 és X(J)>X(J+1)
      Csere(X(J),X(J+1)): J:=J-1
    Ciklus vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A számpélda a belső ciklus feltételénél itt a következőképpen alakul:

```
I=2 ⇒ 5, 3, 9, 1, 7
      3, 5, 9, 1, 7
I=3 ⇒ 3, 5, 9, 1, 7
I=4 ⇒ 3, 5, 9, 1, 7
      3, 5, 1, 9, 7
      3, 1, 5, 9, 7
      1, 3, 5, 9, 7
I=5 ⇒ 1, 3, 5, 9, 7
      1, 3, 5, 7, 9
```

Helyfoglalás: N+1

Hasonlítások száma: N-1 - N*(N-1)/2 $O(n^2)$

Mozgatások száma: 0 - 3*N*(N-1)/2 $O(n^2)$

6. Javított beillesztéses rendezés

Észrevehetjük az előző módszernél, hogy a beillesztő ciklusban a legtöbb elem egyszer mozdul el, a beillesztendő viszont sokszor. Ezt a sok mozgást is csökkenthetjük egyetlenegyre úgy, hogy a beillesztendőt nem tesszük azonnal be a sorozatba, hanem csak a többieket tologatjuk hátra, s a beillesztendőt csak a végén tesszük a helyére.

```
Rendezés(N,X):
  Ciklus I=2-től N-ig
    J:=I-1: Y:=X(I)
    Ciklus amíg J>0 és X(J)>Y
      X(J+1):=X(J): J:=J-1
    Ciklus vége
    X(J+1):=Y
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Az elemek mozgatása miatt e példában a kivett elem visszahelyezéséig egyes elemek kétszer szerepelnek.

```
I=2 ⇒ 5, 3, 9, 1, 7
      5, 5, 9, 1, 7
I=3 ⇒ 3, 5, 9, 1, 7
I=4 ⇒ 3, 5, 9, 1, 7
      3, 5, 1, 9, 7
```

Helyfoglalás: N+1

Hasonlítások száma: N-1 - N*(N-1)/2 $O(n^2)$

Mozgatások száma: 2*(N-1) - 2*(N-1)+N*(N-1)/2 $O(n^2)$

```
      3, 1, 5, 9, 7
      3, 3, 5, 9, 7
I=5 ⇒ 1, 3, 5, 9, 7
      1, 3, 5, 9, 9
```

7. Szétosztó rendezés

A három alaprendezés, s azok javításai után speciális rendezésekkel foglalkozunk, amelyekben előfeltételként speciális megszorításaink lesznek.

A legelsőben feltesszük, hogy a rendezendő elemek olyan rekordok, amelyek kulcsmezője (vagy egy abból kiszámolt számérték) 1 és N közötti természetes szám lehet, s nincs két azonos kulcsú rekord.

A kulcsmező itt egyértelműen megadja azt a helyet, ahova az elemet tenni kell, így semmi hasonlításra nincs szükség. A módszerhez azonban egy újabb tömbre van szükség, ahova az eredményt elhelyezzük.

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N, H=(kulcs,egyéb)
Kimenet : Y∈H^N
ef      : X.kulcs=Permutáció([1,...,N])
uf      : Y rendezett és Y=Permutáció(X).
```

Az algoritmus:

```
Változók:
  N   : Egész            [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X,Y: Tömb(1..N:H_Elemtípus)                    [a két sorozat]
Rendezés(N,X,Y):
  Ciklus I=1-től N-ig
    Y(X(I).kulcs):=X(I)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Itt a speciális feltétel miatt meg kell változtatnunk a példasorozatot: 3, 2, 5, 1, 4 (most csak a kulcsmező értékét tároljuk). A feladat másik specialitása miatt pedig két sorozatot kell adnunk, a bemenetet és az eredményt. Az eredmény még nem kitöltött tagjait jelöli.

Bemenet: 3, 2, 5, 1, 4

Kimenet:
I=1 ⇒ ⊗, ⊗, ⊗, ⊗, ⊗
I=2 ⇒ ⊗, ⊗, 3, ⊗, ⊗
I=3 ⇒ ⊗, 2, 3, ⊗, ⊗
I=4 ⇒ ⊗, 2, 3, ⊗, 5
I=5 ⇒ 1, 2, 3, ⊗, 5
I=6 ⇒ 1, 2, 3, 4, 5

Helyfoglalás: 2*N
Hasonlítások száma: 0
Mozgatások száma: N
Kulcsmezőindexelés: N

8. Számlálva szétosztó rendezés

Egy kicsit kevesebbet követel előfeltételként a következő rendezés: itt az elemek kulcsmezője lehet az [1,N]-nél szélesebb intervallumban is és nem szükséges feltétel a kulcsok különbözősége.

Bemenet	: $N, M \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $H=(kulcs, egyéb)$
Kimenet	: $Y \in H^N$
ef	: $\forall i \ (1 \le i \le N): X_i.kulcs \in \{1..M\}$
uf	: Y rendezett és Y=Permutáció(X).

Itt első lépésként számoljuk le minden lehetséges kulcsértékre, hogy hány ilyen értékű elem van! Mivel a kulcsértékekkel indexelhetünk, ezért a számlálás egyetlen indexeléssel elvégezhető minden elemre.

Másodjára minden lehetséges kulcsértékhez határozzuk meg a nála kisebb vagy egyenlő kulcsú rekordok számát!

Harmadik lépésként minden elemet közvetlenül a helyére helyezhetünk a fenti információ alapján.

```
Rendezés(N,X):
  DB(1..M):=(0,...,0)
  Ciklus I=1-től N-ig
    DB(X(I).kulcs):=DB(X(I).kulcs)+1
  Ciklus vége
  Ciklus J=2-től M-ig
    DB(J):=DB(J)+DB(J-1)
  Ciklus vége
  Ciklus I=1-től N-ig
    Y(DB(X(I).kulcs)):=X(I)
    DB(X(I).kulcs):=DB(X(I).kulcs)-1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Itt a speciális rendezés miatt újabb példasorozatot vizsgálunk: 5, 3, 5, 1, 7. A bemenet mellett először a DB vektor értékeit közöljük, majd az eredményt.

Bemenet:

5, 3, 5, 1, 7

DB:

I=1 ⇒ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
I=2 ⇒ 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0
I=3 ⇒ 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0
I=4 ⇒ 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0
I=5 ⇒ 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0
I=6 ⇒ 1, 0, 1, 0, 2, 0, 1

A második ciklusban:

DB:		Kimenet:
J=2 ⇒ 1, 0, 1, 0, 2, 0, 1		I=1 ⇒ ⊗, ⊗, ⊗, ⊗, ⊗
J=3 ⇒ 1, 1, 1, 0, 2, 0, 1		I=2 ⇒ ⊗, ⊗, ⊗, 5, ⊗
J=4 ⇒ 1, 1, 2, 0, 2, 0, 1		I=3 ⇒ ⊗, 3, ⊗, 5, ⊗
J=5 ⇒ 1, 1, 2, 2, 2, 0, 1		I=4 ⇒ ⊗, 3, 5, 5, ⊗
J=6 ⇒ 1, 1, 2, 2, 4, 0, 1		I=5 ⇒ 1, 3, 5, 5, ⊗
J=7 ⇒ 1, 1, 2, 2, 4, 4, 1		I=6 ⇒ 1, 3, 5, 5, 7
1, 1, 2, 2, 4, 4, 5		

Helyfoglalás: 2*N+M*ε **Hasonlítások száma:** 0

Mozgatások száma: N **Kulcsmezőindexelés:** 5*N

9. Számláló rendezés

Az egyszerű cserés módszer mozgatásainak számát is javíthatjuk az egyik újabb módszer, a szétosztó rendezés segítségével. A cserés rendezésnél ne cserélgessük az elemeket, hanem csak számoljuk meg mindegyikre, hogy hány nála kisebb, illetve az őt megelőzők között hány vele egyenlő van (magát is beleértve). Ezzel a rendezendő adatsorhoz a [0,N-1] intervallum egész számainak egy permutációját rendeltük. Ez a permutáció lehet a bemenete a szétosztó rendezésnek.

```
Rendezés(N,X):
  DB(1..N):=1                [a tömb 1-es értékekkel feltöltése]
  Ciklus I=1-től N-1-ig
    Ciklus J=I+1-től N-ig
      Ha X(I)>X(J) akkor  DB(I):=DB(I)+1
                  különben DB(J):=DB(J)+1
    Ciklus vége
  Ciklus vége
  Ciklus I=1-től N-ig
    Y(DB(I)):=X(I)   [szétosztó rendezés]
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Újra az eredeti számsorozatot vizsgáljuk (5, 3, 9, 1, 7):

A DB vektor értékei:

I=1 ⇒ 1, 1, 1, 1, 1
2, 1, 1, 1, 1
2, 1, 2, 1, 1
3, 1, 2, 1, 1
3, 1, 2, 1, 2
I=2 ⇒ 3, 1, 2, 1, 2
3, 1, 3, 1, 2
3, 2, 3, 1, 2
3, 2, 3, 1, 3
I=3 ⇒ 3, 2, 3, 1, 3

Helyfoglalás: 2*N+N*e

Hasonlítások száma: N*(N-1)/2

Mozgatások száma: N

2-szeres indexelés: N

Az eredmény:

I=1 ⇒ ⊗, ⊗, ⊗, ⊗, ⊗
I=2 ⇒ ⊗, ⊗, 5, ⊗, ⊗
I=3 ⇒ ⊗, 3, 5, ⊗, ⊗
I=4 ⇒ ⊗, 3, 5, ⊗, 9
I=5 ⇒ 1, 3, 5, ⊗, 9
I=6 ⇒ 1, 3, 5, 7, 9

	3, 2, 4, 1, 3
	3, 2, 5, 1, 3
I=4 ⇒	3, 2, 5, 1, 3
	3, 2, 5, 1, 4

10. Rendezés Shell módszerrel

Sokat javíthat a rendező módszeren, ha először a nagy távolságú elemeket hasonlítjuk és cseréljük, mert így az egyes elemek nagyon gyorsan közel kerülhetnek a végleges helyükhöz. Ha egy rendezés ezt az információt kihasználja, akkor az eredetinél lényegesen jobbat kaphatunk. Ilyen módszer például a beillesztéses rendezés.

A használt lépésköz többféle lehet, közös jellemzőjük, hogy szigorúan monoton csökkenők, s utoljára éppen 1 az értékük.

```
Rendezés(N,X):
  L:=L0
  Ciklus amíg L≥1                                    [lépésköz-ciklus]
    Ciklus K=L+1-től 2*L-ig [K: az L. részsorozat 2. eleme]
      Ciklus I=K-tól N-ig L-esével
        J:=I-L: Y:=X(I)    [javított beillesztéses rendezés]
        Ciklus amíg J>0 és X(J)>Y
          X(J+L):=X(J): J:=J-L
        Ciklus vége
        X(J+L):=Y
      Ciklus vége
    Ciklus vége
    L:=Következő(L)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Az L értékének meghatározására többféle módszer van. Lehetséges, hogy 2^k-1 alakú, lehetséges, hogy Fibonacci szám alakú. Kezdőértékként mindenképpen olyan értéket kell meghatározni, amely nem lépi túl az N értékét, majd a **Következő** függvény így alakul:

```
Következő(L):                                  [2^k-1 alakú esetben]
  Következő:=(L+1)/2-1
Eljárás vége.

Következő(L):                        [Fibonacci szám alakú esetben²]
   L2:=L-L1: L:=L1: L1:=L2: Következő:=L1
Eljárás vége.
```

[2] Ha L1 és L egymás utáni Fibonacci számok, akkor L2 az előző Fibonacci szám lesz. A módszernél nyilván előre adott az L0 (kezdő L) és az L1 értéke.

IV. Keresések

Ebben a fejezetben kétféle speciális keresési feladattal foglalkozunk. Az elsőben egy adott értékű elem megkeresése a feladat egy rendezett sorozatban, a másodikban pedig N db sorozatban kell keresnünk egy-egy értéket úgy, hogy azok egymásnak valamilyen szempont szerint megfeleljenek.

1. Keresés rendezett sorozatban

Ebben az esetben tehát adott egy rendezett sorozat, amelyben egy adott értékű elem sorszámát kell meghatározni, ha az benne van a sorozatban.

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N, Y∈H, T:H→L
Kimenet : VAN∈L, SORSZ∈N
ef      : Rendezett(X)
uf      : VAN ≡ (∃i (1≤i≤N): Xi=Y) és
          VAN ⇒ 1≤SORSZ≤N és XSORSZ=Y
```

Az algoritmus:

```
Változók:
  N: Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X: Tömb(1..N:Elemtípus)  [a feldolgozandó sorozat elemei]
  Y: Elemtípus                              [a keresett elem]
  VAN: Logikai          [az eredmény - van-e megfelelő elem]
  SORSZ: Egész     [az eredmény - a megfelelő elem sorszáma]
```

Próbáljuk először a *lineáris keresést* alkalmazni e feladat megoldására! A feladat specialitásából következik, hogy ha egy, a keresett elemnél nagyobb értékű elemet találunk, akkor a keresett elem már biztosan nem fordulhat elő, a keresést be lehet fejezni. Emiatt a program utófeltétele a következő lesz:

```
uf      : VAN ≡ (∃i (1≤i≤N): Xi=Y) és VAN ⇒ 1≤SORSZ≤N és
                    XSORSZ=Y és ∀i (1≤i<SORSZ): Xi<Y
```

```
Keresés(N,X,Y,VAN,SORSZ):
  I:=1
  Ciklus amíg I≤N és X(I)<Y
    I:=I+1
  Ciklus vége
  VAN:=(I≤N) és X(I)=Y
  Ha VAN akkor SORSZ:=I
Eljárás vége.
```

Nézzük meg, hogy e keresést milyen hasonlítás-szám jellemez!

Minimum: 1
Átlag: (N+1)/2
Maximum: N

Az átlagos hasonlítás-számban szereplő lineáris összefüggés miatt hívják e keresést *lineáris keresés*nek.

Logaritmikus keresés

A rendezettséget (és az indexelhetőséget) másképpen is kihasználhatjuk. Vizsgáljuk meg első lépésben a sorozat középső elemét! Ha ez a keresett elem, akkor készen vagyunk. Ha a keresett elem ennél kisebb, akkor csak az ezt megelőzőek között lehet, tehát a keresést a továbbiakban a sorozatnak arra a részére kell alkalmazni. Ha a keresett ennél nagyobb, akkor pedig ugyanezen elv alapján a sorozat ezt követő részére.

Ez a megoldás szintén az utófeltételt módosítja, szigorítja. Itt az előzővel ellentétben nem lehet tudni, hogy a megtalált érték az azonos értékűek közül az első, az utolsó, vagy pedig valamelyik középső lesz.

uf : VAN ≡ ($\exists i$ $(1 \le i \le N)$: $X_i = Y$) és VAN ⇒ $1 \le SORSZ \le N$ és
$X_{SORSZ} = Y$ és $\forall i$ $(1 \le i < SORSZ)$: $X_i \le Y$ és
$\forall i$ $(SORSZ < i \le N)$: $X_i \ge Y$

```
Keresés(N,X,Y,VAN,SORSZ):
  E:=1: U:=N
  Ciklus
    K:=[(E+U)/2]                          [E+U felének egész értéke]
    Elágazás
      Y<X(K) esetén U:=K-1
      Y>X(K) esetén E:=K+1
    Elágazás vége
  amíg E≤U és X(K)≠Y
  Ciklus vége
  VAN:=(E≤U)
  Ha VAN akkor SORSZ:=K
Eljárás vége.
```

Minimum: 1
Átlag: $\log_2(N)$
Maximum: $\log_2(N)+1$

Az átlagos hasonlítás-számban szereplő logaritmikus összefüggés miatt hívják e keresést *logaritmikus keresés*nek, illetve a sorozat felezésére utalva *felezéses* vagy *bináris keresés*nek.

Ennek a keresésnek is meg lehet alkotni a rokonait, mint azt tettük a lineáris keresés-sel, azaz készíthetünk belőle **eldöntést, kiválasztást, megszámolást, kiválogatást.** Ezek közül nézzük meg a kiválogatást!

A módosított specifikáció:

```
Bemenet : N∈N0, X∈H^N, Y∈H, T:H→L
Kimenet : VAN∈L, SORSZ∈N, E,U∈N
ef      : Rendezett(X)
uf      : VAN ≡ (∃i (1≤i≤N): Xi=Y) és
          VAN ⇒ 1≤E≤U≤N és ∀i (E≤i≤U): Xi=Y
```

Nyilvánvaló, hogy az azonos értékű elemek itt mindenképpen egymás mellett fognak szerepelni, azaz a kiválogatáshoz elég megadni az első, illetve az utolsó ilyen elem sorszámát. Ezt úgy tesszük meg, hogy a logaritmikus keresés után előre, illetve hátrafelé megkeressük az utolsó megfelelő elemet.

```
Kiválogatás(N,X,Y,VAN,E,U):
  E:=1: U:=N
  Ciklus
    K:=[(E+U)/2]
    Elágazás
      Y<X(K) esetén U:=K-1
      Y>X(K) esetén E:=K+1
    Elágazás vége
  amíg E≤U és X(K)≠Y
  Ciklus vége
  VAN:=(E≤U)
  Ha VAN akkor akkor E:=K
                     Ciklus amíg E>1 és X(E-1)=Y
                       E:=E-1
                     Ciklus vége
                     U:=K
                     Ciklus amíg U<N és X(U+1)=Y
                       U:=U+1
                     Ciklus vége
  Elágazás vége
Eljárás vége.
```

2. Visszalépéses keresés (backtrack)

Újra konkrét feladatokkal kezdjük e feladattípus ismertetését.

F37. Helyezzünk el egy sakktáblán 8 vezért úgy, hogy egyik se üsse a másikat!

F38. Egy vállalat N db munkára szeretne munkásokat felvenni. Jelentkezik N db munkás, mindegyik megmondja, hogy milyen munkát tudna elvégezni. Osszuk el közöttük a munkákat úgy, hogy mindenkinek jusson munka, s minden munkát elvégezzenek!

F39. N db közért M db pékségtől rendelhet kenyeret. Ismerjük a közértek kenyérigényét, a pékségek sütési kapacitását, valamint azt, hogy melyik közért mely pékségekkel áll kapcsolatban. Adjuk meg, hogy melyik közért melyik pékségtől rendelje a kenyeret, ha mindegyik csak egyetlentől rendelhet!

E feladatok közös jellemzője, hogy eredményük egy sorozat. E sorozat minden egyes tagját valamilyen sorozatból kell kikeresni, de az egyes keresések összefüggenek egymással (vezért nem lehet oda tenni, ahol egy korábban letett vezér ütné; egy munkát nem lehet két munkásnak adni; ha egy pékségnek elfogyott a kenyere, akkor attól már nem lehet rendelni).

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $M \in \mathbf{N}^N$, $\forall i$ $(1 \le i \le N)$: $S_i \in H^{M_i}$,
fk: $\mathbf{N} \times H \times H^* \to \mathbf{L}$, ft: $\mathbf{N} \times H \to \mathbf{L}$

Kimenet : $VAN \in \mathbf{L}$, $X \in \mathbf{N}^N$

ef : $\forall X \in \mathbf{N}^N$: $fk(i, S_i(X_i); S_1(X_1) \ldots S_{i-1}(X_{i-1})) \Rightarrow$
$\forall j<i$: $fk(j, S_j(X_j); \ldots)$

uf : $VAN \equiv \exists Y \in \mathbf{N}^N$: Megoldás(Y) és $VAN \Rightarrow$ Megoldás(X)

Definíció: Megoldás(X) = ($\forall i$ $(1 \le i \le N)$: $1 \le X_i \le M_i$ és $\forall i$ $(1 \le i \le N)$: $fk(i, S_i(X_i), S_1(X_1), \ldots, S_{i-1}(X_{i-1}))$ és $ft(i, S_i(X_i))$)[1]

Megállapíthatjuk tehát, hogy minden egyes új választás az összes korábbitól függhet (ezt formalizálja az *fk* függvény), a későbbiektől azonban nem! Egyes esetekben nemcsak a korábbiaktól, hanem saját jellemzőjétől is függhet a választás (ezt írja le az *ft* függvény).

Egyes speciális esetekben a korábbiaktól függés a korábbi elemekre külön-külön megvizsgálható (F37, F38), ekkor az előfeltétel triviálisan igaz:

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $M \in \mathbf{N}^N$, $\forall i$ $(1 \le i \le N)$: $S_i \in H^{M_i}$,
fk: $\mathbf{N} \times H \times \mathbf{N} \times H \to \mathbf{L}$, ft: $\mathbf{N} \times H \to \mathbf{L}$

Kimenet : $VAN \in \mathbf{L}$, $X \in \mathbf{N}^N$

ef : -

[1] Szavakkal megfogalmazva: az X akkor megoldás, ha minden X_i önmagában helyes, valamint az összes őt megelőző X-beli elem szerint is helyes.

```
uf       : VAN≡∃Y∈N^N: Megoldás(Y) és VAN⇒ Megoldás(X)
Definíció: Megoldás(X)=(∀i (1≤i≤N): 1≤Xi≤Mi és
  ∀i,j (1≤j<i≤N): fk(i,Si(Xi),j,Sj(Xj)) és ft(i,Si(Xi)))
```

Változók:

```
  N: Egész                          [a feldolgozandó sorozat száma]
  M: Tömb(1..N:Egész)  [a feldolgozandó sorozatok elemszáma]
  VAN: Logikai                        [van-e megfelelő elemsorozat]
  X: Tömb(1..N:Egész)                 [a megfelelő elemek sorszáma]
```

A megoldás legfelső szintjén keressünk az I. sorozatból megfelelő elemet! Ha ez sikerült, akkor lépjünk tovább az I+1. sorozatra, ha pedig nem sikerült, akkor lépjünk vissza az I-1.-re, s keressünk abban újabb lehetséges elemet!

A keresés befejeződik, ha mindegyik sorozatból sikerült elemet választanunk (I>N) vagy pedig a visszalépések miatt már az elsőből sem tudunk újabbat választani (I<1).

```
Keresés(N,M,X,VAN):
  I:=1: X(1..N):=(0,...,0)
  Ciklus amíg I≥1 és I≤N
    Jó_eset_keresés(M,X,I,melyik,VAN)
    Ha VAN akkor  X(I):=melyik: I:=I+1    [előrelép]
         különben X(I):=0:      I:=I-1    [visszalép]
  Ciklus vége
  VAN:=(I≥1)
Eljárás vége.
```

Egy lineáris keresés kezdődik az I. sorozatban:

```
Jó_eset_keresés(M,X,I,mely,VAN):
  mely:=X(I)+1
  Ciklus amíg mely≤M(I) és
                  (Rossz_eset(I,X,mely) vagy nem ft(I,mely))[2]
    mely:=mely+1
  Ciklus vége
  VAN:=(mely≤M(I))
Eljárás vége.
```

A Rossz_eset függvény az általános esetben a feladattól függő *fk* függvény kiszámolását jelenti, a fenti speciális esetben pedig egy eldöntést. Ez utóbbit nézzük meg!

```
Rossz_eset(I,X,mely):
  J:=1
  Ciklus amíg J<I és fk(I,mely,J,X(J))
    J:=J+1
  Ciklus vége
  Rossz_eset:=(J<I)
Eljárás vége.
```

[2] A specifikációtól eltérünk! Az *ft* paramétereként az S(mely) az algoritmus végrehajtása közben általában semmit sem mond, ezért nyugodtan helyettesíthetjük magával a 'mely'-lyel.

Az alábbiakban meggondoljuk, hogy miként lehet a fenti keresés tételpárjainak (eldöntés, kiválasztás stb.) backtrack-es változatait megkonstruálni. A fenti megoldást könnyen átalakíthatjuk *eldöntéssé*, *kiválasztássá*, *megszámolássá*, valamint *kiválogatássá*. Az első kettő a legfelső szint minimális átalakítását igényli, a megszámolást a kiválogatás felhasználja, így ez utóbbit fogalmazzuk meg.

```
Bemenet : N∈N0, M∈N^N, ∀i (1≤i≤N): Si∈H^Mi,
          fk: NxHxNxH→L, ft:NxH→L
Kimenet : DB∈N, Y∈(N^N)*
ef      : -
uf      : DB=a megoldások számának szokásos megfogalmazása
   és ∀j (1≤j≤DB): Megoldás(Yj) és Y halmazfelsorolás
```

A kiválogatás alapgondolata: ha egy megoldást megtaláltunk, akkor azt írjuk ki, majd lépjünk vissza, mintha ez nem is lenne megoldás.

```
Kiválogatás(N,M,DB,Y):
  I:=1: X(1..N):=(0,...,0): DB:=0
  Ciklus amíg I≥1
    Jó_eset_keresés(M,X,I,melyik,VAN)
    Ha VAN akkor  X(I):=melyik: I:=I+1    [előrelép]
         különben X(I):=0:      I:=I-1    [visszalép]
    Ha I>N akkor DB:=DB+1: Y(DB):=X: I:=I-1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A legtöbb esetben nagyon sok megoldást kapunk, így a kiválogatást általában nem kigyűjtéssel, hanem kiírással végezzük. Van azonban egy eset, amelyben tartósabban szükség lehet az eredményekre: ez a *minimumkeresés*.

Ebben a feladatban a valamilyen szempontból legjobb megoldást kell megadnunk. Megadunk egy kt költségfüggvényt, ami alapján az egyes megoldásokat összehasonlíthatjuk.

```
Bemenet : N∈N0, M∈N^N, ∀i (1≤i≤N): Si∈H^Mi,
          fk: NxHxNxH→L, ft:NxH→L, kt:H*→N
Kimenet : VAN∈L, Y∈(N^N)*
ef      : -
uf      : VAN≡∃Y∈N^N: Megoldás(Y) és VAN⇒
            (Megoldás(X) és ∀Y: Megoldás(Y)⇒kt(Y)≥kt(X))
```

Az algoritmusban a kiválogatásra alapozva állítsunk elő egy megoldást, ezt hasonlítsuk össze az eddigi legjobb megoldással, s ha jobb nála, akkor ezt őrizzük meg! Kiindu-

ló pontnak vegyünk egy fiktív kezdőértéket, amely minden lehetséges megoldásnál biztosan rosszabb!

```
Minimumkeresés(N,M,VAN,Y):
  I:=1: X(1..N):=(0,...,0): DB:=0
  VAN:=hamis: E:=+∞ [fiktív érték]
  Ciklus amíg I≥1
    Jó_eset_keresés(M,X,I,melyik,VANJO)
    Ha VANJO akkor  X(I):=melyik: I:=I+1    [előrelép]
           különben X(I):=0:      I:=I-1    [visszalép]
    Ha I>N akkor VAN:=igaz: I:=I-1
                 Ha kt(X)<E akkor Y:=X: E:=kt(X)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A visszalépéses minimumkeresés hatékonyabb lehet abban a speciális esetben, ha a költségfüggvényt az egyes elemekre vett elemibb értékfüggvényei összegeként (feltéve, hogy ezek nemnegatív értékek) kell kiszámolni, azaz ha:

$$kt(X) = \sum_{i=1}^{N} ertelem(X_i)$$

Ekkor ugyanis a teljes megoldás elkészülte előtt is felfedezhetjük, hogy az éppen készülő megoldás lehet-e még jobb az eddigi legjobbnál.

```
Minimumkeresés(N,M,VAN,Y):
  I:=1: X(1..N):=(0,...,0): DB:=0
  VAN:=hamis: E:=+∞ [fiktív érték]
  Ciklus amíg I≥1
    Jó_eset_keresés(M,X,I,melyik,VANJO)
    Ha VANJO és kt(X)+ertelem(melyik)<E
                        akkor  X(I):=melyik: I:=I+1
                      különben X(I):=0:      I:=I-1
    Ha I>N akkor VAN:=igaz: I:=I-1: Y:=X: E:=kt(X)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A visszalépéses keresés egy másik változatában nem rögzített elemszámú az eredmény. Egy lehetséges esetben meg kell adni minden olyan (korlátozott elemszámú) sorozatot, amelyet egy nem megfelelő elem zár le.

Definíció: Megoldás(X)=∃K (1≤K≤N):(∀i (1≤i≤K): $1 \le X_i \le M_i$ és
∀i,j (1≤j<i≤N): fk(i,$S_i(X_i)$,j,$S_j(X_j)$) és ft(i,$S_i(X_i)$)) és
(∃j (1≤j<K≤N): fk(K,$S_K(X_i)$,j,$S_j(X_j)$) vagy ft(K,$S_K(X_K)$)))

Alakítsuk át a korábban szerepelt kiválogatási algoritmust úgy, hogy a belső ciklus álljon le, ha vissza kellene lépni! Ekkor jegyezzük fel az aktuális állást, lépjünk vissza, majd folytassuk a keresést!

```
Kiválogatás(N,M,DB,Y):
  I:=1: X(1..N):=(0,...,0): DB:=0
  Ciklus amíg I≥1
    VANJO:=igaz
    Ciklus amíg I≥1 és I≤N és VANJO
      Jó_eset_keresés(M,Y,I,melyik,VANJO)
      X(I):=melyik: I:=I+1
    Ciklus vége
    Ha nem VANJO akkor DB:=DB+1: Y(DB):=X: I:=I-1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Itt is megvizsgálhatnánk a legjobb megoldás algoritmusát, de ezt az előző minimum-kereséshez való hasonlósága miatt az Olvasóra hagyjuk.

Egy másik lehetséges esetben nem tudjuk, hogy az eredmény hány elemű, csupán azt, hogy mikor van készen. Ezt a `kész(X)` logikai értékű függvény adja meg.

```
Kiválogatás(N,M,DB,Y):
  I:=1: X(1..N):=(0,...,0): DB:=0
  Ciklus amíg.I≥1 és nem kész(X)
    Jó_eset_keresés(M,X,I,melyik,VAN)
    Ha VAN akkor  X(I):=melyik: I:=I+1    [előrelép]
         különben X(I):=0:      I:=I-1    [visszalép]
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Nézzük meg a fejezet elején közölt feladatok megoldását!

F37. 8 vezér a sakktáblán

Oszloponként egy-egy vezért helyezünk el, a sakktáblán 8 oszlop, oszloponként 8 sor van. Bármelyik két vezér akkor van helyesen elhelyezve, ha nincsenek azonos sorban vagy azonos átlóban.

N=8	a sorozatok száma,
M(i)=N	mindegyik sorozat elemszáma egyforma
ft(a,b) = igaz	azonosan igaz függvény[3]
fk(i,j,k,l) = nem (j=l vagy $\|i-k\|=\|j-l\|$)	

A keresés legfelső szintje változatlan, a két további eljárást kell újrafogalmazni.

[3] A vezér önmagában bárhova tehető.

```
Jó_eset_keresés(M,X,I,mely,VAN):
  mely:=X(I)+1
  Ciklus amíg mely≤M(I) és Rossz_eset(I,X,mely)
    mely:=mely+1
  Ciklus vége
  VAN:=(mely≤M(I))
Eljárás vége.

Rossz_eset(I,X,mely):
  J:=1
  Ciklus amíg J<I és nem(mely=X(J) vagy I-J=|mely-X(J)|)[4]
    J:=J+1
  Ciklus vége
  Rossz_eset:=(J<I)
Eljárás vége.
```

F38. N ember - N munka

A megoldást két változatban készítjük el. Az elsőben az egyes emberek által végezhető munkákat egy-egy sorozatban tároljuk.

N	az emberek és az állások száma
M(i)	az i. ember által végezhető munkák száma
S(i,j)	az i. ember által végezhető j. munka
ft(i,j)=igaz	azonosan igaz függvény
fk(i,j,k,l)=(S(i,j)≠S(k,l))	nem végezhetnek azonos munkát

Itt is a két belső eljárást kell újrafogalmazni.

```
Jó_eset_keresés(M,X,I,mely,VAN):
  mely:=X(I)+1
  Ciklus amíg mely≤M(I) és Rossz_eset(I,X,mely)
    mely:=mely+1
  Ciklus vége
  VAN:=(mely≤M(I))
Eljárás vége.

Rossz_eset(I,X,mely):
  J:=1
  Ciklus amíg J<I és S(J,X(J))≠S(I,mely)
    J:=J+1
  Ciklus vége
  Rossz_eset:=(J<I)
Eljárás vége.
```

[4] I biztosan nagyobb, mint J, ezért nem kell |I-J|-nél az abszolút érték.

A második változatban az emberek tudását egy mátrixban tároljuk, amelyben egy ember és egy munka sorszámához rendelünk igaz vagy hamis értéket aszerint, hogy az ember azt a munkát el tudja-e végezni vagy sem.

N	az emberek és az állások száma
N	az i. ember által végezhető munkák száma
S(i,j)	az i. ember el tudja-e végezni a j. munkát
ft(i,j)=S(i,j)	
fk(i,j,k,l)=(j≠l)	nem végezhetnek azonos munkát

Megint a két belső eljárást fogalmazzuk újra.

```
Jó_eset_keresés(M,X,I,mely,VAN):
  mely:=X(I)+1
  Ciklus amíg mely≤M(I) és (Rossz_eset(I,X,mely) vagy
                            nem S(I,mely))
    mely:=mely+1
  Ciklus vége
  VAN:=(mely≤M(I))
Eljárás vége.

Rossz_eset(I,X,mely):
  J:=1
  Ciklus amíg J<I és X(J)≠mely
    J:=J+1
  Ciklus vége
  Rossz_eset:=(J<I)
Eljárás vége.
```

F39. N közért - M pékség

Tároljuk a közértek kenyérigényét, a pékségek sütési kapacitását, a közértek és a pékségek kapcsolatát!

N,M	közértek száma, pékségek száma
IGENY(i)	az i. közért kenyérigénye
KAPACITAS(j)	a j. pékség sütési kapacitása
KAPCS(i,j)	van-e kapcsolat az i. közért és a j. pékség között
ft(i,j)=KAPCS(i,j)	

$$fk\left(i, X(i), X(1), \ldots, X(i-1)\right) = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ X(j)=X(i)}}^{i} IGENY(j) \right) \leq KAPACITAS\left(X(i)\right)$$

Újra a két belső eljárást fogalmazzuk meg;

```
Jó_eset_keresés(M,X,I,mely,VAN):
  mely:=X(I)+1
  Ciklus amíg mely≤M(I) és (Rossz_eset(I,X,mely) vagy
                            nem KAPCS(I,mely))
    mely:=mely+1
  Ciklus vége
  VAN:=(mely≤M(I))
Eljárás vége.

Rossz_eset(I,X,mely):
  S:=0
  Ciklus J=1-től I-ig
    Ha X(I)=X(J) akkor S:=S+IGENY(J)
  Ciklus vége
  Rossz_eset:=(S>KAPACITAS(melyik))
Eljárás vége.
```

Elképzelhető, hogy e feladatnak nincs megoldása. Ekkor módosítsuk úgy a feladatot, hogy olyan megoldást adjunk, amelyben a lehető legtöbb közért kap kenyeret valamelyik pékségtől.

Ezt a -hiányos- megoldást úgy állítjuk elő, hogy felveszünk egy M+1., fiktív pékséget, amely tetszőleges mennyiségű kenyeret képes sütni, s akivel mindenki kapcsolatban van. Előállítjuk az összes megoldást, s azt választjuk ki közülük, amelyben a legtöbb olyan közért van, amely nem a fiktív szállítótól kapja a kenyeret. A költségfüggvényt kell definiálnunk:

$$kt(X) = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i \neq M+1), \text{ ahol } \chi(\log) = \begin{cases} 1 & ha\ \log \\ 0 & ha\ \neg \log \end{cases}$$

A fejezet befejezéseként egy másik "módszert" is leírunk, amellyel némileg egyszerűbb megoldásokat lehet kreálni a backtrack-es tételvariánsokhoz. Egy apró észrevenni valóra építünk, amely után teljesen mechanikusan kaphatók meg az algoritmusok a már jól ismert *alapvariánsaiból*.

Induljunk ki a backtrack első algoritmusának legfelsőbb szintjéből, és hasonlítsuk össze a lineáris keresés tétel algoritmusával. Alighanem a következő analógiákat fedezzük föl:

Backtrack-es keresés

```
I:=1 [komponens sorszám]
X(1..N):=(0,...,0) [kezdőindexek]
I≥1  [van-e még keresnivaló]
I≤N  [van-e még megoldáskomponens]
Jó_eset_keresés(I,mely,VAN)
Ha VAN akkor X(I):=mely: I:=I+1
     különben X(I):=0: I:=I-1
[a következő komponens]
```

Lineáris keresés

```
I:=1 [elemsorszám]

I≤N  [van-e még elem]
T(X(I)) [T tul-e]
I:=I+1 [köv. elem]
```

Nézzük ez alapján pl. az *kiválasztást*!

```
Kiválasztás(N,M,X):
 I:=1: X(1..N):=(0,...,0)
 Ciklus amíg I≤N
  Jó_eset_keresés(M,X,I,mely,VAN)
  Ha VAN akkor X(I):=mely: I:=I+1
       különben X(I):=0: I:=I-1
 Ciklus vége
Eljárás vége.
```

```
Kiválasztás(N,M,X):
  I:=1
  Ciklus amíg nem T(X(I))

    I:=I+1

  Ciklus vége
... Eljárás vége.
```

A *megszámolás* és a *kiválogatás* tételek származtatásának egy látszólagos akadálya van. Nevezetesen az, hogy abban nem 'amíg'-os ciklus szerepel. Ezen azonban keresztül tudunk siklani azzal, ha átírjuk a számlálásos ciklust amíg-osra:

```
Ciklus I:=1-től N-ig          I:=1
                              Ciklus amíg I≤N
  ...                            ...
                                 I:=I+1
Ciklus vége                   Ciklus vége
```

Az átírásnak most már semmi akadálya nincs. Pl. a *megszámolásé* az alábbi:

```
Megszámolás(N,M,X,DB):
 DB:=0
 I:=1: X(1..N):=(0,...,0)
 Ciklus amíg I≥1
  Ha nem I≤N akkor
        DB:=DB+1
        X(I):=0: I:=I-1
  különben
    Jó_eset_keresés(M,X,I,mely,VAN)
    Ha VAN akkor X(I):=mely: I:=I+1
         különben X(I):=0: I:=I-1
   Elágazás vége
   Ciklus vége
Eljárás vége.
```

```
Megszámolás(N,DB):
  DB:=0
  I:=1
  Ciklus amíg I≤N
     Ha T(X(I)) akkor
        DB:=DB+1
        I:=I+1
     különben I:=I+1

     Elágazás vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

V. Programozási tételek egymásraépítése

Gyakran előfordul, hogy programozási tételeket egymás után kell használnunk. Ezen egymásutániságnál azonban sok esetben a két megoldóalgoritmus egybeépítése egyszerűbb, rövidebb, hatékonyabb megoldást eredményez. Ebben a részben ezekkel foglalkozunk. Az egymásraépítés mindig két programozási tétel összefogását jelenti, a fejezeteket a korábban alkalmazandó tétel szerint fogalmaztuk meg.

1. Másolással összeépítés

*Másolás*sal bármelyik programozási tétel egybeépíthető, hiszen csupán annyi a teendő, hogy a programozási tételben szereplő X_i bemenő adatra hivatkozást kicseréljük $g(X_i)$-re.

Ha például egy számsorozat elemei négyzetösszegét kellene megadnunk, az egy *másolás*t (számokhoz számok négyzetei rendelése) és egy *sorozatszámítás*t (összegzés) tartalmaz. Nézzük meg e két tétel általános egymásraépítését!

Bemenet	$N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $F: G^* \to G$, $g: H \to G$[1]
Kimenet	$S \in G$
ef	$\exists F_0 \in G$ és $\exists f: G \times G \to G$ és $F(Y_1, \ldots, Y_N) = f(F(Y_1, \ldots, Y_{N-1}), Y_N)$ és $F() = F_0$
uf	$S = F(g(X_1), \ldots, g(X_N))$.

*Az **algoritmus:***

Függvény
g: H_elemtípus → G_elemtípus

Változók:

N	: **Egész**	[a feldolgozandó sorozat elemszáma]
X	: **Tömb**(1..N:H_elemtípus)	[feldolgozandó elemek]
F0	: G_Elemtípus	[a művelet nulleleme]
S	: G_Elemtípus	[az eredmény]

A megoldásban –mint azt a sorozatszámításnál tettük– induljunk ki a nullelemből, alkalmazzuk a *f* függvényt az addig kiszámított értékre és a sorozat eleméből kiszámított értékre!

---

[1]Az algoritmus szempontjából adottságnak, másként bemenetnek tekinthetjük az F és a g függvényeket is.

```
Másolás_sorozatszámítás(N,X,S):
  S:=F0
  Ciklus I=1-től N-ig
    S:=f(S,g(X(I)))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Második példaként vegyük a *másolás* és a *maximumkiválasztás* összeépítését! Ebben a maximális elem értékét és az indexét is meghatározzuk. (Az előző feladat analógiájára ilyen lehet a legnagyobb abszolútértékű szám abszolútértékének meghatározása egy számsorozatból.)

Bemenet :	$N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, G rendezett halmaz (<,≤ relációk), g:H→G
Kimenet :	$MAX \in \mathbf{N}$
ef :	$N \geq 1$
uf :	$1 \leq MAX \leq N$ és $\forall i (1 \leq i \leq N): g(X_{MAX}) \geq g(X_i)$

Az algoritmus:

```
Függvény
  g: H_elemtípus → G_elemtípus
Változók:
  N   : Egész            [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X   : Tömb(1..N:H_Elemtípus)[a feldolgozandó sorozat elemei
  MAX: Egész              [a maximális értékű elem sorszáma]
  MAXERT: G_elemtípus                    [a maximális érték]
```

Ebben a megoldásban –a maximumkiválasztás alapján– vegyük az első elemből kiszámított függvényértéket induló maximumnak, ezt hasonlítsuk a további elemekből kiszámított függvényértékekkel, s a legnagyobbat őrizzük meg!

```
Másolás_maximumkiválasztás(N,X,MAX,MAXERT):
  MAX:=1: MAXERT:=g(X(1))
  Ciklus I=2-től N-ig
    Ha MAXERT<g(X(I)) akkor MAXERT:=g(X(I)): MAX:=I
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

2. Megszámolással összeépítés

A *megszámolás*t három elemi programozási tétellel érdemes egybeépíteni, az *eldöntés*sel, a *kiválasztás*sal, valamint a *keresés*sel.

Itt olyan kérdéseket tehetünk fel, hogy van-e egy sorozatban legalább K db T tulajdonságú elem, adjuk meg a sorozat K. T tulajdonságú elemét stb.

Az általánossága miatt nézzük a *megszámolás* és a *keresés* egymásraépítését! Az *eldöntés*nél, illetve a *kiválasztás*nál hasonlóan kellene eljárnunk, hiszen e két típusalgoritmus megoldásszövege része a *keresés* megoldásszövegének.

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$

$T: H \to \mathbf{L}$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } T(x) \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$

Kimenet : $VAN \in \mathbf{L}$, $SORSZ \in \mathbf{N}$

ef : -

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és $VAN \equiv (DB \geq K)$ és

$VAN \Rightarrow 1 \leq SORSZ \leq N$ és $T(X_{SORSZ})$ és $\sum_{i=1}^{SORSZ} \chi(X_i) = K$

Az algoritmus:

Függvény:
T: Elemtípus → **Logikai**

Változók:
```
N   : Egész            [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
X   : Tömb(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
K   : Egész          [az eredmény - a megfelelő elemek száma]
VAN: Logikai           [az eredmény - van-e megfelelő elem]
SORSZ: Egész      [az eredmény - a megfelelő elem sorszáma]
```

Induljunk ki a keresés megoldásából! A keresés ciklusa akkor állt le, amikor megtaláltuk az első T tulajdonságú elemet. Ezt kell kicserélni arra, hogy csak a K.-nál álljon le (ha egyáltalán van K.). A ciklusmagban viszont számolnunk kell a T tulajdonságú elemeket - ahogyan azt a *megszámolás*nál tettük!

```
Keresés(N,X,K,VAN,SORSZ):
  I:=0: DB:=0
  Ciklus amíg I<N és DB<K
    I:=I+1
    Ha T(X(I)) akkor DB:=DB+1
  Ciklus vége
  VAN:=(DB=K)
  Ha VAN akkor SORSZ:=I
Eljárás vége.
```

3. Maximumkiválasztással összeépítés

*Maximumkiválasztás*sal kapcsolatban azt a kérdést fogalmazhatjuk meg, hogy hány darab maximális értékű elem van, s hogy melyek a maximális értékű elemek.

Itt tehát a *maximumkiválasztás*t kell egybeépíteni a *megszámolás*sal, illetve a *kiválogatás*sal.

Az a kérdés, hogy van-e egyáltalán több maximális értékű elem, egy menetben nem dönthető el, azaz a három tételt nem lehet egymásbaépíteni, hanem csak egymás után alkalmazni.

A korábbiakban megállapítottuk, hogy a kigyűjtéses *kiválogatás* mindig tartalmaz egy *megszámolás*t, így csak a *kiválogatás*sal kell foglalkoznunk.

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, H rendezett halmaz

$$\chi: H \to \{0,1\}, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq \max(X) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Kimenet : $DB \in \mathbf{N}$, $Y \in \mathbf{N}^N$, $MAXERT \in H$

ef : -

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és $Y \in \{1..N\}^{DB}$ és Y halmazfelsorolás és $\forall i,j\ (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq DB): X_i \leq X(Y_j)$ és $MAXERT = X(Y_1)$

Az algoritmus:

```
Változók:
  N : Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X : Tömb(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
  DB: Egész                      [a maximális elemek száma]
  Y : Tömb(1..N:Egész)         [a maximális elemek sorszámai]
```

Az összeépítés alapgondolata, hogy a lokális maximumok megőrzésével együtt válogassuk is ki a lokális maximumokat. Természetesen új lokális maximum megtalálásakor a korábbi kigyűjtést el kell felejteni. A kiválasztó ciklus végén a lokális maximum éppen a keresett maximumérték, tehát az éppen kigyűjtött sorszámok a maximumok sorszámai lesznek.

```
Maximumkiválogatás(N,X,DB,Y,MAXERT):
  MAXERT:=X(1): DB:=1: Y(DB):=1
  Ciklus I=2-től N-ig
    Elágazás
      X(I)>MAXERT  esetén  MAXERT:=X(I): DB:=1: Y(DB):=I
      X(I)=MAXERT  esetén  DB:=DB+1: Y(DB):=I
    Elágazás vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

4. Kiválogatással összeépítés

Elsőként a *kiválogatást* a *sorozatszámítás*sal építjük egybe. Olyan feladatoknál alkalmazható ez, amikor a számítást egy sorozat T tulajdonságú elemeire kell csak elvégeznünk.

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $F: H^* \to H$

$T: H \to \mathbf{L}$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } T(x) \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$

Kimenet : $DB \in \mathbf{N}_0$, $Y \in \mathbf{N}^N$, $S \in H$

ef : $\exists F_0 \in H$ és $\exists f: H \times H \to H$ és

$F(X_1, \ldots, X_N) = f(F(X_1, \ldots, X_{N-1}), X_N)$ és $F() = F_0$

uf : $DB = \sum_{i=1}^{N} \chi(X_i)$ és $Y \in \{1..N\}^{DB}$ és Y halmazfelsorolás

és $\forall i (1 \le i \le DB)$: $T(X(Y_i))$ és $S = F(X(Y_1), \ldots, X(Y_{DB}))$

Az algoritmus:

```
Függvény:
  T: Elemtípus → Logikai
Változók:
  N : Egész              [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
  X : Tömb(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
  F0: Elemtípus                          [a művelet nulleleme]
  S : Elemtípus                                  [az eredmény]
```

A megoldásban vegyük a sorozatszámítás algoritmusát, de a műveletet ne minden esetben végezzük el, hanem csak akkor, ha a megfelelő elem T tulajdonságú! Sokszor nincs az eredményhez szükség a DB-re, a mostani megoldásban ezt is képezzük.

```
Kiválogatás_sorozatszámítás(N,X,S,DB):
  S:=F0:  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor DB:=DB+1: S:=f(S,X(I))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Második példánkban a *kiválogatást* a *maximumkiválasztás*sal építjük egybe. Tipikusan ilyen feladatok azok, amelyekben meg kell határozni egy sorozat T tulajdonságú elemeinek maximumát, minimumát.

Bemenet : $N \in \mathbf{N}_0$, $X \in H^N$, $VAN \in \mathbf{L}$

$T: H \to \mathbf{L}$, $\chi: H \to \{0,1\}$, $\chi(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } T(x) \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}$

Kimenet : $MAX \in \mathbf{N}$, $MAXERT \in H$

ef : -
uf : VAN≡(∃i(1≤i≤N): T(X_i) és
VAN ⇒ 1≤MAX≤N és T(X_{Max}) és
MAXERT=X_{MAX} és ∀i(1≤i≤N): T(X_i) ⇒ X_{MAX}≥X_i

Az algoritmus:

Függvény:
T: Elemtípus → **Logikai**

Változók:
N : **Egész** [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
X : **Tömb**(1..N:Elemtípus) [a feldolgozandó sorozat elemei]
VAN: **Logikai** [van-e maximális T tulajdonságú elem]
MAXERT: Elemtípus [a maximális értékű elem értéke]
MAX: **Egész** [a maximális értékű elem sorszáma]

Vegyük a megoldáshoz a maximumkiválasztás algoritmusát! Ne akkor jegyezzük fel az új elemet maximumnak, amikor az nagyobb az addigi maximumnál, hanem ennek még az is legyen a feltétele, hogy az új elem T tulajdonságú! Csupán egyetlen probléma van: semmi nem garantálja, hogy az első elem T tulajdonságú, sőt hogy egyáltalán ilyen elem lesz (amit pedig a maximumkiválasztás kihasznált).

Egyik lehetséges megoldás lenne, ha megkeresnénk az első T tulajdonságú elemet, s innen indítanánk a maximumkiválasztást. A másik –s mi ezt követjük– egy fiktív kezdőértékkel indít, s elölről vizsgálja a sorozatot. (Ha e fiktív érték marad a MAXERT-ben az azt jelenti, hogy nincs T tulajdonságú elem a sorozatban.)

```
Kiválogatás_maximumkiválasztás(N,X,VAN,MAX,MAXERT):
  MAXERT:=-∞
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) és X(I)>MAXERT akkor MAXERT:=X(I): MAX:=I
  Ciklus vége
  VAN:=(MAXERT≠-∞)
Eljárás vége.
```

A harmadik példában a *kiválogatást* a *másolás*sal építjük egybe. Ezt olyan feladatoknál kell alkalmazni, ahol egy sorozat T tulajdonságú elemeit kell lemásolni, rajtuk egy függvény kiszámításával.

Bemenet : N∈$\mathbf{N}_0$, X∈H^N
T:H→**L**, f:H→G, χ:H→{0,1}, $\chi(x)=\begin{cases}1, \text{ ha } T(x)\\0, \text{ egyébként}\end{cases}$
Kimenet : DB∈$\mathbf{N}_0$, Y∈$\mathbf{N}^N$, Z∈G^N

ef : -

uf : $DB=\sum_{i=1}^{N}\chi(X_i)$ és $Y \in \{1..N\}^{DB}$ és Y halmazfelsorolás
és $\forall i(1 \le i \le DB)$: $T(X(Y_i))$ és $\forall i(1 \le i \le DB)$: $Z_i=f(X(Y_i))$

Az algoritmus:

Függvény:
T: H_Elemtípus → **Logikai**
f: H_elemtípus → G_elemtípus

Változók:
N : **Egész** [a feldolgozandó sorozat elemei száma]
X : **Tömb**(1..N:H_elemtípus) [feldolgozandó elemek]
DB: **Egész** [a megfelelő elemek száma]
Z : **Tömb**(1..N:G_elemtípus) [feldolgozott elemek]

A megoldásban vegyük a kiválogatás kigyűjtéses algoritmusát, de ne a megfelelő elemek sorszámait gyűjtsük ki, hanem az ezen elemeken kiszámított függvényértéket!

```
Kiválogatás_másolás(N,X,DB,Z):
  DB:=0
  Ciklus I=1-től N-ig
    Ha T(X(I)) akkor DB:=DB+1: Z(DB):=f(X(I))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

E fejezet algoritmusai nagyon hasonlóan alkalmazhatók *szétválogatás*sal, *metszet*tel, *unió*val való egymásraépítésre. A szükséges módosításokat a *kiválogatás* ciklusa helyett a megfelelő programozási tétel ciklusában kell elvégezni. A *szétválogatás* specialitása lehet, hogy az eredményeként szereplő két sorozatra különböző programozási tételeket is lehetne alkalmazni (például lehetne feladat a T tulajdonságú elemek maximumának és a nem T tulajdonságú elemek összegének meghatározása a feladat).

Irodalomjegyzék

1. O.J.Dahl-E.W.Dijkstra-C.A.R.Hoare: Strukturált programozás.
   Mûszaki Könyvkiadó, 1978

2. Varga L.:Programok analízise és szintézise.
   Akadémiai Kiadó, 1981

3. N. Wirth: Algoritmusok + adatstrukturák = programok.
   Mûszaki Könyvkiadó, 1982

4. Fóthi Á.: Bevezetés a programozáshoz.
   Tankönyvkiadó, egyetemi jegyzet, 1983

5. Szlávi P.-Zsakó L.: A programozás ABC-je = az ABC' programozása.
   ELTE TTK Informatikai Tanszékcsoport, ABC-s füzetek, 1984

6. Szlávi P.-Zsakó L.: Módszeres programozás.
   Műszaki Könyvkiadó, 1986

7. Szlávi P.-Zsakó L. et al.: Számítástechnika középfokon.
   OMIKK, 1987

8. D.Knuth: A számítógép programozás művészete 3.
   Műszaki Könyvkiadó, 1988

9. T.H Cormen-C.E. Leiserson-R.L. Rivest: Algoritmusok.
   Műszaki Könyvkiadó, 1998

10. Rónyai l.-Ivanyos G.-Szabó R.: Algoritmusok.
    TYPOTEX, 1999

A *µlógia* sorozat eddig megjelent tagjai

1. Horváth László - Szlávi Péter - Zsakó László: Modellezés és szimuláció
2. *Szlávi Péter - Zsakó László: Programozási forgácsok - KÖMAL feladatmegoldás*[2]
3. *Turcsányiné Szabó Márta: A Commodore-64 Terrapin LOGO leírása*
4. Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Rekurzió
5. Szlávi Péter: A számítógépről népszerűsítő stílusban
6. Zsakó László: Módszeres programozás: Hatékonyság
7. Makány György: Programozási nyelvek: PROLOGIKA
8. *Szlávi Péter: A programkészítés technológiája*
9. Szlávi Péter - Zsakó László: Szimulációs modellek a populációbiológiában
10. Pintér László: Programozási tételek rekurzív megvalósítása
11. *Temesvári Tibor: Alkalmazói rendszerek: QUATTRO PRO 3.0*
12. Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Adatfeldolgozás
13. Krammer Gergely: Turbo Grafika
14. Pap Gáborné - Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Szövegfeldolgozás
15. Pintácsi Imréné - Siegler Gábor - Zsakó László: Szimulációs modellek a kémiában
16. Horváth László - Szabadhegyi Csaba - Szlávi Péter - Zsakó László: Függvényábrázolás
17. Szabadhegyi Csaba - Szlávi Péter - Zsakó László: Szimulációs modellek a fizikában
18. Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Programozási bevezető
19. Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Programozási tételek
20. *Hack Frigyes: Számítógéppel támogatott problémamegoldás*
21. Szlávi Péter - Temesvári Tibor - Zsakó László: Módszeres programozás: A programkészítés technológiája
22. Szlávi Péter – Temesvári Tibor – Zsakó László: Programozási nyelvek: Alapfogalmak
23. Illés Zoltán: Programozási nyelvek: C++
24. *Szlávi Péter - Temesvári Tibor - Zsakó László: Programozási nyelvek: ELAN*
25. *Ökrös László: Programozási nyelvek: Az LCN LOGO leírása*
26. *Hack Frigyes: Informatika*
27. Pap Gáborné - Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Rekurzív típusok
28. *Hack Frigyes: Programozási nyelvek: BASIC*

---

[2]A *µlógia*-sorozat dőlt betűkkel szedett tagjai már nem kaphatók.

29. *Kincses Zoltán: Gólyakalauz az Internet használatához*
30. Zsakó László: Az informatika ismeretkörei
31. Hack Frigyes: Informatikai ismeretek
32. *Hack Frigyes: DERIVE*
33. *Pozsár Erika: Internet és társadalmi viszonyok*
34. Pap Gáborné - Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Adattípusok
35. *Köves Gabriella: TEX lépések*
36. Nagy István: Szövegszerkesztés a Word 97-tel
37. Gábor Béla: Programozási nyelvek: A Delphi programozása
38. Szlávi Péter - Zsakó László: Módszeres programozás: Gráfok, gráfalgoritmusok
39. Fejezetek a számítástechnika történetéből I.
40. Fejezetek a számítástechnika történetéből II.
41. Vágvölgyi István: Prezentáció és grafika oktatása
42. *Nagy Sándorné: Adatbázis-kezelés Access 97-tel*
43. Hack Frigyes: 3D-grafika geometriai alapjai
44. Zsakó László (szerk.): Fejezetek a számítógépi grafikából
45. Dávid András – Pap Gáborné: Adatszerkezetek példatár

Szilánkok részsorozat[3]

1. *Szlávi Péter: A típusfogalom fejlődése az algoritmikus nyelvekben.*
2. *Temesvári Tibor: ELAN1 programozási nyelv leírása*
3. *Szlávi Péter: Előadás a szövegtípusokról*
4. *Szlávi Péter: Előadás a rekurzióról*
5. Szlávi Péter: Előadás a gráftípusról
6. *Szlávi Péter: Adatok, adattípusok*
7. *Szlávi Péter: Előadás a sorozattípusokról*
8. *Szlávi Péter: Előadás a file-típusokról és a táblázattípusról*
9. *Szlávi Péter: Előadás a táblázattípusról*
10. *Gálos György - Pap Gáborné: Adatszerkezetek példatár*
11. Szlávi Péter: Gondolatok a típus-specifikációk kompatibilitásának vizsgálatáról

---

[3]A Mikrológia sorozat előzeteseként megjelent könyvek, melyek később beépülnek a sorozatba. (A dőlt betűkkel szedettek ilyenek, emiatt már nem kaphatók.)